ELEMENTI
DI PERSPETTIVA

SECONDO LI PRINCIPII

DI BROOK TAYLOR

CON VARIE AGGIUNTE

SPETTANTI ALL' OTTICA,
E ALLA GEOMETRIA

DEL PADRE

FRANCESCO JACQUIER

DELL' ORDINE DE' MINIMI

LETTORE DI FISICA NELL' UNIVERSITA'
DELLA SAPIENZA.

IN ROMA MDCCLV.

PER GENEROSO SALOMONI

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

All' Eño, e Rño Principe

GIOACCHINO

CARDINAL PORTOCARRERO

FR. FRANCESCO JACQUIER.

SOGLIONO gli Autori nel dedicare le loro opere a qualche illuſtre perſonaggio, implorare con lungo diſcorſo la protezione del loro Mecenate. Io perſuaſo e convinto della bontà, e quaſi ardirei dirlo, dell' amicizia che ha verſo di me Vostra Eminenza, ſtimerei inutile il domandare con molte parole un favore, che io già ſono ben ſicuro di avere ottenuto. Ma ſe foſſe neceſſario di richiedere a Vostra Eminenza con maggiore premura una tale grazia, io ſarei nel caſo di rappreſentarle, come queſta mia opera è ſtata intrapreſa di ſuo conſiglio, e per così dire, nata nella ſua caſa. Io conterò ſempre tra i momenti li più fortunati, e li più glorioſi della mia vita quel poco tempo avan-

zato da graviſſimi affari, che Vostra Eminenza ſi degna impiegare meco a diſcorrere de' ſuoi antichi ſtudj Matematici: io dico *meco*, riguardando come un'altro me ſteſſo il mio Collega ugualmente favorito da Vostra Eminenza. Da queſte fortunatiſſime converſazioni ha avuto la ſua illuſtre origine il preſente libro, il quale perciò ſi trova in poſſeſſo di un diritto quaſi naturale alla protezione di Vostra Eminenza. Nè mi debbo dilungare, ſiccome nelle dedicatorie coſtumar ſi ſuole, a celebrare le

Vostre virtù. Chi evvi mai che non sappia, che voi siete forse quel solo, il quale sia stato occupato in tanti ardui, e tanto fra loro diversi impieghi con uguale successo ed universale approvazione? Chi non sa, che ora applicato ai doveri d'un privato cavaliere vi ornaste la mente di quelle Scienze, che a quel grado più convenevoli sono; ora chiamato a diversi Ministeri, e a militari comandi, e finalmente alle prime dignità della Chiesa, sapeste sempre accoppiare le qualità di tanti stati differenti? Parla

tutto il Mondo delle eccellenti prerogative, di cui siete fornito, essendo il Vostro Palazzo l'asilo non solo di una nazione, ma di tutte quelle, che allettate dalla fama del Vostro merito vengono più da vicino ad ammirare le Vostre virtù; ed avendo ancor'io la ben'avventurata sorte di esserne testimonio oculato, ardisco presentare a Vostra Eminenza questo debole saggio della mia gratitudine, della mia stima, e di quella venerazione, colla quale mi protesto.

Quantum voluptatis atque admirationis cæperim, cum legerem Elementa Perspectivæ una cum variis ad Geometriam, atque Opticam spectantibus additamentis, quæ celeberrimus, ac doctissimus P. Franciscus Jacquier suo plane more conscripsit, quisque facile intelliget, qui eundem librum diligenter pervolverit; summam enim doctrinam, ingeniique vim incredibilem, qua tot maximæ res, atque utilissimæ & acutè detectæ, & plane, perspicueque demonstratæ sunt, se invenisse lætabitur, quicumque in optimis hujusmodi studiis maxima cupit cum fruge versari. Satisfactum profecto hìc est tam doctissimis Viris, qui sublimiora tantummodo his in rebus exquirunt, quam iis etiam, qui mediocrem adhuc dederunt eisdem operam. Itaque bonam, electamque legentium copiam non defuturam jure possum ominari, mihique amicissimo Scriptori eam gloriam, in cujus jam dudum possessione est, auctam maxime, ac cumulatam gratulari.

Benedictus Stay in Arch. Rom. Eloquentiæ Professor.

IMPRIMATUR,

Si iis, ad quos pertinet ita videbitur.

Nicolaus Maria de Vecchis Arch. Rom. Rector.

IMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendissimo Patri Magistro Sac. Pal. Apost.

F. M. de Rubeis Patriarcha Constantinop. Vicesg.

Per ordine del Reverendissimo Padre Maestro del Sagro Palazzo ho letto il libro intitolato *Elementi di Perspettiva &c.* composto dal M. R. P. Francesco Jacquier, nel quale nulla ho ritrovato di contrario alla Fede Cattolica; anzi per tutto vi ho ammirato un ordine naturalissimo, congiunto con una mirabile chiarezza (per quanto comporta l'indole dell'argumento), & una somma penetrazione del Chiarissimo Autore in simil materia. Perlochè lo giudico degnissimo delle stampe.

Dal nostro Convento di S. Maria sopra Minerva questo dì 21. Maggio 1755.

F. G. B. Audifredi Bibliotecario Casanatense.

IMPRIMATUR.

Fr. Vincentius Elena Mag. Socius Rmi P. Magistri Sac. Pal. Apost. Ord. Prædic.

IM- Con

CON sommo mio piacere ho letto tanto il trattato sugoso della Perspettiva, quanto la copiosa, e comprensiva Appendice, che vi ha aggiunta il dottissimo P. Jacquier, uomo così rinomato ovunque son conosciute le lettere. Vi si vede generalmente quella penetrazione profonda, quella vasta erudizione, quella perizia nel Calcolo, e nella Geometria la più sublime, felicità nel ritrovare, chiarezza nel dimostrare, precisione nell' esprimere, che già da tanto tempo gli hanno assicurato nella letteraria republica uno de' primi posti. Il merito, e la giustizia da me richiedono questo publico attestato dell' interno mio sentimento, assai più, che la stretta amicizia, che ci congiunge.

Ruggiero Giuseppe Boscovich
della Compagnia di Gesù.

PRE-

PREFAZIONE.

TANTI *sono li trattati di Perspettiva già dati alle stampe che potrebbe comparire ad alcuni affatto superflua questa nova opera. Non vi è forse nessuna parte di Matematica, che sia stata più trattata dalli teorici, e meno ben eseguita dalli pratici. Gli elementi di Geometria tanto necessarj nelle arti sono ignorati, anzi disprezzati dalla maggior parte degli artisti medesimi. Con tutto ciò non si deve credere, che un Geometra ben versato nella teorìa della Perspettiva sia perciò capace di eseguire un disegno con eleganza, e secondo le più esatte regole dell'arte. Si vuole oltre la teoria una certa facilità di mano, e di disegno, la quale non si può acquistare, che coll' esercizio. Onde si vede quanto sia ridicola questa obiezione di alcuni, i quali con questo sofisma si credono liberati dallo studio della Geometria. Nè si può opporre, che vi sono tanti eccellenti autori di Perspettiva pratica senza ajuto della Geometria,*

tria. Io lodo moltissimo questi libri, e se non correggono tutti gli errori, almeno ne correggono molti; ma accadono infiniti casi nella Perspettiva, i quali non si possono tutti descrivere, e spiegare in un libro; un uomo versato nella teoria li comprenderà tutti, e saprà ridurli in esecuzione.

L'universalità, e la brevità delli principj, tra molti trattati di Perspettiva giuntimi alle mani, mi ha fatto sempre preferire la Perspettiva lineare del dottissimo Geometra Brook Taylor, *il quale ha considerato li diversi problemi nella loro maggiore estensione senza alcuna limitazione, e determinazione de' piani.* Non *si deve fare menzione del celebre* Brook Taylor *senza gli elogj dovuti a uno delli più profondi Matematici di questo secolo, e delli secoli precedenti. Il libro eccellente intitolato*: Methodus incrementorum, *è un opera lodata da pochi, non perchè non sia degna di tutta la lode, ma perchè è intesa da pochissimi, tanto sono sublimi, e difficili le cose delle quali tratta.* Onde, *senza volere far torto ad alcuno, devo avvisare chi non conosce il nostro Autore di non confonderlo con altri, che portano l'istesso gran nome.*

Il trattato di Perspettiva del medesimo Autore, benchè in un grado molto inferiore, è uno di quelli libri elementari che dimostrano un grand' uomo; anche nelle cose piccole si conosce sempre un grand' ingegno. Io dunque persuaso del preggio di questo metodo nel trattare la Perspettiva, ho creduto fare una cosa utilissima col publicare questi elementi, mostrandone l'utilità in una copiosa Appendice, anche nelle parti le più sublimi di matematica. Questo trattato è come diviso in due parti; la prima affatto elementare sarà facilissima a quelli, che intendono la dottrina delle proporzioni. L'Appendice, che potrebbe chiamarsi seconda parte, contiene cose più difficili, e trattate con somma brevità, essendomi proposto solamente di far vedere con poche parole l'applicazione della Perspettiva ad altre materie più sublimi.

Essendo già stampata una gràn parte di questo trattato, il Signor Calandrini dottissimo Professore di Matematica mi man-

mandò un libro sull'istessa materia, del quale, tempo fa, mi aveva scritto l'Autore medesimo il Signor Murdock celebre Geometra. Il detto libro in poche pagine contiene bellissime cose, le quali anche si ricavano dalli nostri principj. Ne posso mancare alla mia intima amicizia, e singolare venerazione verso un Geometra insigne il Signor Clairaut, il quale nelle memorie dell'Academia di Parigi nell'anno 1731. ha trattato colla sua solita eleganza il Problema 2. del num. V.

Gli uomini studiosi di questo piccolo libro non ci troveranno figure ben disegnate, delle quali sogliono essere pieni li trattati volgari di Perspettiva più per sodisfazione degli occhj, e guadagno delli Libraj, che per instruzione della mente. Io sono persuasissimo, che coll'ajuto di pochi precetti ben intesi, e coll'esercizio della sola Perspettiva lineare si possa arrivare ad una perfetta cognizione di quest'arte; e questa cognizione acquistata per gradi, e non tutta in un subito, deve essere il fine di tutti gli elementi.

Rimane ora che io mi discolpi, se essendo forestiere ho avuto l'ardire di scri-

vere in una lingua à me poco familiare. Faranno le mie scuse molti uomini poco intelligenti di lingua latina, per li quali principalmente è scritta la prima parte di questa opera. Mi scusa ancora la lingua della Geometria tanto facile, e, per così dire, universale, che io non devo in questa sorte di materia incorrere la taccia di temerità, che avrei meritata scrivendo in altro genere.

PERSPETTIVA LINEARE

PARTE PRIMA.

DEFINIZIONI.

Def. 1. LA perspettiva lineare è l'arte di rappresentare con esattezza sopra un piano un' oggetto qualunque.

Per formarsi un' idea chiara, e distinta delli principj di quest' arte, si deve considerare una pittura perfetta, come l'oggetto medesimo situato nel luogo proprio, talmente che lo spettatore non possa, o almeno difficilmente, distinguere la pittura dall'oggetto vero. A questo effetto è necessario, che i raggi di luce vengano all'occhio dello spettatore da tutte le parti della pittura colle medesime circostanze di direzione, di luce, di ombra, e di colori, come sarebbero

bero venendo dalle parti corrispondenti dell'oggetto stesso.

Sia O l'occhio dello spettatore (*fig.* 1.) diretto verso il cubo *abcde*, del quale l'originale sia ABCDE; la luce partendo da un punto qualunque, *a*, della pittura, deve percuotere l'occhio dello spettatore secondo la medesima direzione, colla medesima forza di luce, e ombra come farebbe venendo dal punto corrispondente A dell'originale, secondo il raggio AO. Queste tre circostanze costituiscono le tre parti della pittura. Primo il disegno, che consiste nella posizione, e conseguentemente nelle forme delle figure dipinte; il che ben'eseguito secondo le regole di matematica e non per pura prattica, o come si suole dire, colle dita e coll'occhio, forma l'arte della perspettiva. Secondo il colorito. Terzo l'arte della luce e delle ombre, chiamata volgarmente *chiaro oscuro*. Li principj di queste tre parti, ma particolarmente quelli della perspettiva dipendono dalla precedente riflessione; e sopra di essa stabilirò tutte le seguenti dimostrazioni.

Def. 2. Se le linee tirate secondo una certa legge dalle differenti parti d'una figura qualunque, incontrano un piano, nel quale descrivano una figura, la figura così disegnata si chiama *projezione* della prima figura. Le linee che producono queste projezioni, prese insieme sono chiamate *sistema dei raggi*, e se questi raggi passano tutti per un medesimo punto, si chiamano *cono dei raggi*, il quale cono viene chiamato *cono ottico*, se il detto punto sia l'occhio dello spettatore.

Def. 3. Se il sistema delli raggi è tale, che vengano tutti paralleli tra di loro, e perpendicolari all'orizonte, e che di più la projezione sia fatta in un piano parallelo all'orizonte, questa projezione si chiama *iconografia* della figura proposta. Sia il piano GHIK (*fig.* 2.) parallelo all'orizonte, e i raggi A*a*, B*b*, C*c* venendo da diversi punti dell'ottaedro ABCDEF, sieno perpendicolari all'orizonte, e paralleli tra di loro, la projezione *abcde*, formata dalli medesimi raggi è chiamata iconografia della figura ABCDEF.

Def. 4. Se il sistema delli raggi è tale, che sieno paralleli tra di loro, e all'orizonte, e che di più la projezione si faccia in un piano perpendicolare a questi raggi, e all'orizonte. La detta projezione si chiama *ortografia* della figura proposta. Li raggi A*a*, B*b*, C*c* &c. (*fig.* 2.) essendo paralleli all'orizonte e tra di loro, di più il piano GHLM della projezione essendo perpendicolare alli raggi, *abcdef* è l'ortografia della figura ABCDEF.

Queste sono le definizioni volgari delle parole iconografia, e ortografia. Ma io devo avvertire, che in questo trattato mi allontanerò dalle definizioni generalmente ricevute, adoprando questi due termini per significare due projezioni qualunque formate da' sistemi di raggi paralleli, essendo i medesimi sistemi perpendicolari tra di loro, e alli piani di projezione, come nella figura presente, senza considerare in alcuna maniera la la loro relazione coll'orizonte. In questa specie di projezione chiamerò la projezione di un punto, o d'una linea, la *posizione* del punto, o della linea nel piano di projezione. Per esempio, *a*, è la posizione del punto A nel piano GHIK, e *ae* è la posizione della linea AE nel piano GHLM.

*Def.*5. Se la projezione è formata da un cono di raggi, viene chiamata *scenografia*. Per esempio (*fig.*7.) la figura *abcde*, segnata nel piano FGHI, dal passaggio dei raggi AO, BO, CO &c. che partono da diversi punti del cubo ABCDE, e che convengono in O, si chiama la scenografia della figura ABCDE. Questa projezione è la perspettiva della figura respettivamente all'occhio posto in O, come sarà dimostrato in appresso. E' evidente, che questa istessa projezione viene prodotta dalle ombre delle figure, considerando il corpo luminoso come un punto; abbenchè nel caso del Sole, e della Luna, questo punto essendo a una distanza infinita per riguardo alli nostri sensi, li raggi sieno fisicamente paralleli. Il gran Nevvtono ha indicato in poche parole tutta la teoria delle ombre, ma la materia essendo sublime non deve aver luogo in questi elementi di perspettiva fatti anche per quelli, che non sanno più della Geometria commune. Onde sarà meglio di spiegare questa bella e difficile dottrina in una delle Appendici che aggiungerò a questo trattato.

*Def.*6. Il *punto di veduta* si chiama quel punto, nel quale è posto l'occhio dello spettatore. Questo punto è la sommità del cono ottico, come sarà

sarà evidente dal teorema 2., nel quale si dimostrerà, che la perspettiva d' un oggetto qualunque è la projezione scenografica del medesimo.

*Def.*7. Se dal punto di veduta si tira una perpendicolare al quadro, il punto in cui la detta linea incontra il quadro è chiamato il *centro* del quadro; la distanza tra questo centro ed il punto di veduta viene chiamata *distanza* del quadro.

*Def.*8. Se per il punto di veduta si concepisce un piano parallelo al quadro, questo piano è chiamato *piano dirigente*.

*Def.*9. Per oggetto *originale*, o sia punto, o linea, o superficie, o solido s'intende l'oggetto reale da ridursi in perspettiva.

*Def.*10. Per piano *originale* s'intende il piano nel quale è posto l'oggetto originale, o sia punto, o linea, o figura piana.

*Def.*11. Il punto, in cui una linea originale qualunque, prolungata se sia necessario, incontra il quadro, è chiamato *intersezione* della linea.

*Def.*12. L' intersezione commune d'un piano originale qualunque, e del quadro è chiamata semplicemente *intersezione*.

*Def.*13. Il punto, in cui una linea originale qualunque incontra il piano dirigente, è chiamato il *punto dirigente* della linea originale; e la linea condotta dal punto dirigente al punto di veduta è chiamata *direttrice* della linea originale.

*Def.*14. La commune intersezione d'un piano originale qualunque, e del piano dirigente è chiamata *linea dirigente* del piano originale.

Def. 15. Una linea condotta dal punto di veduta, parallela ad una linea originale qualunque, è chiamata semplicemente *parallela* della medesima linea originale.

Def. 16. Un piano, che passa per il punto di veduta, ed è parallelo ad un piano originale qualunque, viene chiamato semplicemente *parallelo* del medesimo piano originale.

Def. 17. Il punto, in cui la parallela d'una linea originale incontra il quadro, è chiamato punto *evanescente* della medesima linea, e la distanza tra questo punto evanescente, ed il punto di veduta è chiamata semplicemente *distanza* del punto evanescente.

Def. 18. La linea, in cui il parallelo d'un piano originale qualunque taglia il quadro, è chiamata linea *evanescente* del medesimo piano; e se dal punto di veduta si conduca una linea che incontri la detta linea evanescente ad angoli retti, il punto ove cade la perpendicolare si chiama *centro* della medesima linea. La distanza tra il detto centro, e il punto di veduta è chiamata semplicemente *distanza* della medesima linea evanescente.

Def. 19. La perspettiva d'una figura qualunque si dice *projezione* della medesima.

Per formarsi un' idea chiara delle precedenti definizioni il lettore deve immaginarsi, che il piano ABC (*fig*.3.) sia il piano del quadro, O il punto di veduta (*Def*.6.) ODE il piano dirigente parallelo al quadro (*Def*.8.), FG una linea originale (*Def*.9.) nel piano originale FGH (*Def*.10.), il quale taglia il quadro in BI, ed il piano dirigente in DE. Sia OAC un piano parallelo al piano originale FGH, e del quale la commune intersezione col quadro sia la retta AC. Sia la linea OV parallela alla linea originale FG, ed incontri il quadro in V. FG incontri il quadro in B, ed il piano dirigente in D. Supposte tutte queste cose, B è l'intersezione della linea originale FG (*Def*.11.), D il suo punto dirigente (*Def*.13.), V il suo punto evanescente (*Def*.17.), OD la sua direttrice (*Def*. 13.), OV distanza del punto evanescente V (*Def*.17.), BI è l'intersezione (*Def*.12.), DE la linea dirigente (*Def*.14.), OAC il parallelo (*Def*.16), AC la linea evanescente (*Def*.18.) del piano originale FGH. Se si condurrà la linea OS perpendicolare alla linea evanescente AC in S, il punto S sarà il centro, e SO sarà la distanza della linea evanescente AC (per l'istessa definizione.)

Assioma 1. La commune intersezione di due piani è una linea retta.

Assioma 2. Se due linee si tagliano in un punto, o sono tra di loro parallele, si potrà far passare un piano per ambedue le linee.

Assioma 3. Se tre linee rette si tagliano vicendevolmente, o se due di loro essendo parallele vengono tagliate da una terza, saranno tutte tre nel medesimo piano, cioè un piano, che passa per due di loro, passerà ancora per la terza.

Assioma 4. Ogni punto di una linea retta sta nel piano della medesima retta.

Lemma 1. Se BSO, e AEBD (*fig*.4.) sieno due piani, i quali si taglino ambedui nella retta ASB, e che da un punto qualunque O d'uno di questi piani si conducano due linee, delle quali una OS sia perpendicolare alla retta AB in G, e l'altra OC incontri il piano AEBD ad angoli retti in C, condotta la retta CS, sarà perpendicolare ad ASB.

La dimostrazione di questo lemma si ricava facilmente dalla proposizione 2. del libro XI. degli Elementi. Imperocchè nella linea ASB si concepiscano due punti A, B ugualmente distanti da S, la linea OS essendo perpendicolare ad AB, il punto O sarà ugualmente distante da BA. Onde saranno uguali le rette OA, OB. Di più immaginandosi le rette CB, CA, si avranno li triangoli rettangoli OCB, OCA, nelli quali saranno uguali i lati CB, CA (*prop*.47. *lib*.1.), e per conseguenza il punto C essendo ugualmente distante dalli punti B, A ugualmente distanti da S, sarà CS perpendicolare ad ASB.

TEOR. I.

Una linea condotta dal centro del quadro al centro della linea evanescente è perpendicolare alla detta linea evanescente.

DIM.

DIM.

Sia AEBD (*fig*.4.) il piano del quadro, O il punto di veduta, OSB il piano parallelo, del quale la commune interfezione col quadro è la linea evanescente ASB. Sia S il centro della detta linea, e, C il centro del quadro. Condotte OS, e OC si unifcano i punti C, S colla retta CS, sarà OS perpendicolare ad AS (*Def*.18.), ed OC perpendicolare al piano AEBD (*Def*.7.). Onde CS è perpendicolare ad AS (*Lem*.1.).

Cor. La distanza OS d'una linea evanescente qualunque ASB, è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, del quale i lati sono la distanza del quadro OC, e la distanza CS tra il centro della linea evanescente, ed il centro del quadro.

TEOR. II.

La perspettiva, o projezione d'un oggetto qualunque è la projezione scenografica dell'istesso oggetto sul piano del quadro, ed il punto di veduta è la sommità del cono ottico.

DIM.

La luce deve arrivare all'occhio O dello spettatore (*fig*.1.) da un punto qualunque *a* della perspettiva, come farebbe dal punto corrispondente A dell'oggetto originale (*Def*.1.). Onde è evi-

evidente, che li raggi *a*O, AO sono nella medesima retta; e per conseguenza il raggio AO passa per il punto *a* del quadro, e tutta la projezione *abcde* è la projezione scenografica della figura originale ABCDE, il cono ottico essendo OABCDE, del quale la sommità è il punto di veduta O.

Cor. 1. la projezione d'una linea retta è una linea retta; imperocchè il cono ottico ODE, che produce la projezione *d e* d'una linea qualunque DE, diventa la superficie del triangolo piano ODE, tutti i raggi, che vengono al punto O dalli differenti punti della linea DE, essendo nel piano, che passa per le linee DO, e EO. Onde *d e* è l'intersezione del quadro col triangolo ODE, e conseguentemente la detta intersezione è una linea retta (*Ass.* 1.).

Cor. 2. L'originale della projezione può essere un'altro oggetto qualunque, che produrrebbe l'istesso cono di raggi. Per esempio, l'originale della projezione *de* può essere un altra retta *de*, che produrrebbe il cono ottico ODE, come viene prodotto dalla DE.

Si può domandare con ragione, perchè le figure rappresentate in un quadro compariscono essere l'oggetto medesimo, che rappresentano. Si potrebbe rispondere, che la mente nostra à acquistato l'uso di giudicare delli oggetti, che hanno certe relazioni di luce, d'ombra, di forma, e di situazione. Tutte queste circostanze sono necessarie alla perfezione del quadro; benchè un semplice disegno sia alcune volte quasi bastante per

per esprimere la relazione delle parti, come si osserva in un pavimento, nel quale le pietre compariscono quadrate, benchè siano espresse con figure irregolarissime. Questo effetto deve attribuirsi alla relazione delle parti; imperocchè la rappresentazione di ogn'uno di questi quadrati difficilmente comparirebbe quadrata, se non vi fossero altri oggetti, i quali ce ne facessero giudicare diversamente, attesa la relazione che hanno con essi. Si potrebbero a questo proposito aggiugnere molte altre riflessioni; ma la materia è più metafisica, che matematica.

E' notissima la storia del Giovane, al quale il Cheselden fece l'operazione della cateratta. Le osservazioni sopra li primi fenomeni di questa vista nascente sono descritte nelle transazioni filosofiche *n*.402., e possono servire di spiegazione alla presente difficoltà.

TEOR. III.

La projezione d'una linea retta, che non sia parallela al quadro, passa per l'intersezione della detta linea, e per il punto evanescente.

DIM.

Sia *fg* (*fig*.3.) la projezione della linea originale FG: essendo FO, GO li raggi, che producono le projezioni *f*, *g* delli punti F, G (*Teor*.2.) sarà *fg* l'intersezione del quadro col piano del trian-

triangolo OFG. Ma tutta la linea FGB sta nel medesimo piano, e conseguentemente l'interfezione B (*Ass.*4.). Dunque la linea *fg* prolungata passa per B. Il che era da dimostrarsi in primo luogo. Essendo OV parallela ad FG (*Def.* 17.), essa giace nel piano del triangolo OFG. Onde *fg* prolungata passa per il punto V. Che era da dimostrarsi in secondo luogo. Questo teorema è il principale fondamento di tutta la perspettiva prattica, perciò il lettore deve renderselo familiare. Per maggiore facilità il senso di questo teorema è espresso nella figura 1., nella quale la projezione *bc* incontra la linea originale BC nell'interfezione K, e passa per il punto evanescente V prodotto dalla parallela OV.

Scol. Se la linea originale passa per il suo punto evanescente, tutta la projezione diventa il punto evanescente medesimo; onde in questo caso la linea svanisce; e per questo motivo pare a proposito il termine di evanescente. A questa ragione si aggiunge, che la projezione d'un oggetto tanto è più piccola, e nell'istesso tempo più vicina del punto evanescente, quanto l'oggetto è più lontano sopra una linea qualunque, e finalmente quando la projezione cade sul detto punto, svanisce la di lei grandezza, imperocchè l'oggetto originale è a una distanza infinita. Ciò si capisce facilmente rappresentandosi un'uomo che fugge da noi in una lunga camminata, esso comparisce più piccolo quanto è più distante. La ragione di questa apparenza è evi-

è evidente dalli Corollarj seguenti, e dalla figura prima, nella quale le linee uguali e parallele, CD, BA, poste sopra la medesima retta BA, formano delle projezioni *ba*, *cd* tanto più piccole quanto queste linee sono più lontane, talmente che la linea essendo in una distanza infinita, il punto *a* cada in *b*, nel quale caso la projezione svanisce.

Cor. 1. Le projezioni delle linee originali che sono parallele tra di loro, ma non al quadro, passano tutte per il medesimo punto evanescente. Imperocchè non hanno che una medesima parallela commune a tutte, e conseguentemente il medesimo punto evanescente. Ciò si vede nella figura 1. in cui la projezzione *da*, e *cb*, delle parallele DA, CB, si incontrano nel commune punto evanescente V.

Cor. 2. Il centro del quadro è il punto evanescente delle linee perpendicolari al quadro. (*Def.* 7. 15. 17.)

THEOR. IV.

La projezione d'una linea parallela al quadro è parallela alla linea originale.

DIM.

Sia EF il piano del quadro (fig. 5.), AB la linea originale parallela al medesimo, e *ab* la projezione; supposto O il punto di veduta, e OAB è OAB il cono ottico, (*theor.*2.) *ab*, è l'interfezione del quadro col piano del triangolo OAB, onde AB, essendo parallela al piano EF, sarà *ab*, parallela ad AB, imperocchè ambedue le linee sono nel piano del triangolo OAB, e non s'incontrano. Poichè se s'incontrassero la loro commune interfezione sarebbe nel piano EF, e conseguentemente AB, non sarebbe parallela al piano EF.

*Cor.*1. Le projezioni delle linee parallele tra di loro, e al quadro, sono parallele. Per esempio *ab*, *dc*, sono parallele tra di loro, e alle linee originali AB, CD.

*Cor.*2. La projezione *abcd*, d'una figura piana qualunque parallela al quadro, è simile alla figura originale. Imperocchè conducendo la diagonale AC, e la projezione corrispondente *ac*, li lati, *ab*, *bc*, *ac*, sono paralleli agli lati originali corrispondenti, AB, BC, AC. Onde gli angoli in *a*, *b*, *c*, sono uguali agli angoli corrispondenti A, B, C, e conseguentemente il triangolo *abc*, è simile al triangolo ABC. Nell' istessa maniera, *acd* è simile ad ACD, e perciò tutta la figura *abcd*, è simile alla figura ABCD.

*Cor.*3. Nel medesimo caso, la lunghezza d'una linea qualunque *ab*, nella projezione è alla lunghezza della linea originale AB, come la distanza del quadro è alla distanza trà il punto di veduta e il piano della figura originale: Sia O*g*G, perpendicolare a questi due piani in *g*, G, sarà *ab*: AB = O*a* : OA = O*g* : OG (*prop.*7. *lib.*11. *elem.*) ma *g* è il centro, O*g* è la distanza del quadro, OG è la distanza tra il punto di veduta O, ed il piano originale ABCD. Onde *ab* è a AB come la distanza del quadro è alla distanza trà il punto di veduta ed il piano della figura originale.

TEOR. V.

La projezione d'una linea è parallela alla sua direttrice.

DIM.

Le linee OF, OG, OD, *fg* (*fig.*3.) sono tutte nell'istesso piano (per la spiegazione data dopo la def.19. e per il theor.3.). Ma il piano dirigente ODE, è parallelo al piano del quadro ABIC (*def.*8.). Onde la dirrettrice OD è parallela alla projezione *fg* (*prop.*16. *lib.*11. *delli elem.*)

*Cor.*1. Le projezioni delle linee che hanno la medesima direttrice, sono parallele.

*Cor.*2. La direttrice d'una linea originale parallela al quadro, è parallela alla medesima originale, e conseguentemente questa direttrice sta in un piano parallelo al piano della linea originale; onde la linea evanescente di questo piano, e la projezione della linea sono parallele.

TEOR.

TEOR. VI.

La linea evanescente, l'intersezione, e la linea dirigente d'un piano originale qualunque sono parallele tra di loro.

DIM.

Li piani NVC, DFH (*fig.*3.) essendo paralleli (*def.*16.) siccome ancora li piani ODE, CAB (*def.*8.), la linea evanescente CV, l'intersezione IB, e la linea dirigente ED sono parallele (*prop.*16. *lib.*11. *elem.*)

Cor. La distanza *f*V tra la projezione d'un punto qualunque, ed il punto evanescente V, sta alla distanza BV tra l'interfezione B, ed il medesimo punto evanescente V, come la distanza OV di questo punto evanescente V, è alla distanza DF, tra il punto dirigente, ed il punto originale F. Imperocchè OVBD, è un parallelogrammo, e perciò BV = DO : di più li triangoli *f*OV, OFD, sono simili, essendo li lati V*f*, e OD paralleli, onde *f*V : VO = DO (BV) : DF.

TEOR. VII.

Li punti evanescenti di tutte le linee in un piano originale qualunque, sono nella linea evanescente del piano.

DIM.

Poichè tutte le linee originali sono nell'istesso piano, le parallele a queste stesse linee che passano tutte per il medesimo punto di veduta saranno tutte in un piano parallelo (*prop.*15. *lib.*11. *elem.*) onde tutti li punti evanescenti sono nella linea evanescente.

*Cor.*1. Li piani originali paralleli tra di loro hanno la medesima linea evanescente.

*Cor.*2. Il punto evanescente della commune intersezione di due piani originali, è l'intersezione delle loro linee evanescenti. Poichè il punto evanescente della commune intersezione deve ritrovarsi nelle linee evanescenti di ambedue i piani, e per conseguenza nell'intersezione delle linee evanescenti.

*Cor.*3. La linea evanescente d'un piano perpendicolare al quadro passa per il centro del quadro.

TEOR. VIII.

Le intersezioni di tutte le linee nel medesimo piano originale, sono nell'intersezione di questo piano.

Questa proposizione è evidente dalle definizioni 11. e 12.

*Cor.*1. L'intersezione della commune intersezione di due piani originali, è l'intersezione

delle

delle loro interfezioni. Poichè l'interfezione della commune interfezione deve effere nell'interfezione di ambedue i piani, e confeguentemente nell'interfezione delle loro interfezioni.

*Cor.*2. Li piani delli quali la commune interfezione è parallela al quadro hanno le interfezioni parallele; imperocchè la commune interfezione effendo parallela al quadro non incontra mai il quadro, onde la fua interfezione col quadro è nulla. Dunque ancora è nulla l'interfezione delle interfezioni delli piani (*Cor.*1.) cioè le dette interfezioni fono parallele. Di più fono parallele le linee evanefcenti delli medefimi piani. (*Teor.*6.)

PROBL. I.

Effendo dato il centro del quadro, e data anche la diftanza, trovare la projezione d'un punto, del quale la pofizione ful quadro, e la diftanza fiano date.

Sia S il centro del quadro (*fig.*6.) e, *b*, la pofizione data del punto originale. Si conduca ad arbitrio la retta SO, uguale alla diftanza del quadro. Sia condotta *b*A, uguale alla diftanza della pofizione data, e parallela alla SO. Tirando S*b*, e A*o*, il punto d'interfezione *a*, farà la projezione cercata.

DIM.

Supponiamo l'angolo OS*b*, retto, e confeguentemente ancora l'angolo A*ba*, immaginandofi allora che li triangoli SO*a*, e *b*A*a* fi rivolgano intorno alla linea S*ab*, come affe, finchè SO, e *b*A diventino perpendicolari al quadro, O farebbe il punto di veduta, A, il punto originale, e AO, il raggio che incontra il quadro in *a*, ove farà confeguentemente la projezione del punto A. (*teor.*2.) Ma il punto *a*, rimane l'ifteffo qualunque fia l'angolo OS*b*, poichè per la fimilitudine delli triangoli OS*a*, A*ba*, fi ha fempre S*a* : *ab* = SO : *b*A, la quale proporzione non dipende dall'angolo OS*b*. Onde in tutti i cafi il punto *a*, è la projezione d'un punto del quale la pofizione ful quadro è *b*, e la diftanza della pofizione è *b*A.

*Cor.*1. Avendo condotta la linea S*b*, fi può colla regola, e col compaffo ritrovare il punto *a*, dividendo la retta, S*b*, in *a*, talmente che S*a*, fia ad *ab*, come la diftanza del quadro SO fta alla diftanza *b*A, della pofizione del punto originale.

*Cor.*2. Si può con quefta medefima propofizione ritrovare la projezione d'una linea qualunque, ritrovando le projezioni di due punti di quefta linea, e conducendo una linea per le due projezioni trovate.

PROBL. II.

Effendo data la pofizione, e l'interfezione della linea originale affieme coll'angolo, che fa l'originale colla fua pofizione, effendo dato di di più il centro del quadro colla diſtanza, ritrovare la projezione della linea originale, il punto evaneſcente, la diſtanza del detto punto.

Sia DE (*fig.6.*) la poſizione data della linea propoſta, D la ſua interſezione, S il centro del quadro. Si conduca DC, la quale faccia l'angolo EDC, uguale all'angolo della linea originale colla ſua poſizione. Sia condotta SV parallela a DE, e SO perpendicolare alla SV, ed uguale alla diſtanza del quadro. Si conduca OV, parallela a DC, che tagli SV in V, e ſi tiri DV, ſarà V, il punto evaneſcente, OV la ſua diſtanza, e DV la projezione indefinita della linea propoſta.

D I M.

Immaginiamo i piani OSV, CED, rivolgerſi intorno alle linee SV, DE, come aſſi, finchè diventino perpendicolari al quadro. Sarà O il punto di veduta, DC la linea originale, alla quale eſſendo OV, parallela, ſarà V, il punto evaneſcente (*Def.*17,) e conſeguentemente DV, la projezione cercata. (*teor.*3.)

*Cor.*1. Si può trovare la projezione d'una parte AC, della linea originale DAC, conducendo le linee AO, CO, come raggi viſuali che tagliano DV, in *a*, *c*. Imperocchè li punti *a*, *c*, dipendono ſolamente dal paralleliſmo delle linee OV, DC, e dalla loro proporzione: eſſendo *a*V : *a*D = VO : DA, e CV : CD = VO : DC per la ſimilitudine delli triangoli *a*VO, *a*DA, e *c*VO, *c*DC. Per maggior chiarezza ſi potrebbe paragonare la figura 6. colla terza, nella quale li punti O, V, *f*, *g*, B, G, F corriſpondono alli punti O, V, *c*, *a*, D, A, C.

*Cor.*2. Eſſendo ritrovata la DV, ſi potrà trovare la projezione *c*, d'un punto qualunque C, colla regola, e col compaſſo, facendo *c*V : *c*D = OV : CD.

P R O B L. III.

Eſſendo data la projezione d'una linea col ſuo punto evaneſcente, trovare la projezione d'un punto che divide la linea originale in ragione data.

Sia AB (*fig.*7.) la projezione data, V, il punto evaneſcente. Si conduca ad arbitrio la retta VO, alla quale ſi faccia parallela *ba*, e per un punto qualunque O, della linea VO, ſi conduchino OA, e OB, che incontrino *b*, *a*, in *a*, e *b*. Si divida *ab* in *c*, nella proporzione data, e ſi tiri OC, la quale taglia AB in C. Sarà C la projezione cercata, l'originale di BC, eſſendo all'originale di CA, come *bc*, a *ca*.

D I M.

Eſſendo OV parallela a, *ba*, ſi può conſiderare *ba*, come la linea originale e OV come la ſua parallela, e conſeguentemente O, come il il punto di veduta e aO, bO, cO, come i raggi visuali, che producono la projezione delli punti A, B, C.

Cor. Poichè li triangoli BCb,OBV sono simili sarà CB; $Cb = BV : OV$, e $CB = \frac{BV \times Cb}{OV}$. Di più per la similitudine delli triangoli AOV, ACA, sarà $AC : AV = ac : OV$, e $CA = \frac{AV \times aC}{OV}$, onde sostituendo in vece di aC, Cb, le loro proporzionali ca, cb, sarà $CA : CB = \frac{AV \times ac}{OV} : \frac{VB \times cb}{OV} = AV \times ac : VB \times cb$, Perciò si potrà trovare il punto C, colla regola, e col compasso, facendo $CA : CB = AV \times ac : VB \times cb$.

PROBL. IV.

Essendo data la projezione d'una linea col suo punto evanescente, da un punto dato nella stessa projezione tagliare un segmento che sia la projezione d'una parte data dalla linea originale.

Sia AB la projezione data (*fig.*8.), V, il punto evanescente, e C, sia il punto dal quale si deve tagliare il segmento. Sia condotta ad arbitrio VO, alla quale si faccia parallela abc, e da un punto qualunque O, in VO, siano condotte OA, OB, OC, che tagliano ab, in a, b, c. Si

Si prenda cd, ad, ab, come la parte data dell' originale è all'originale di AB, e sia condotta, Od, che taglierà AB in D. Sarà CD il segmento cercato.

DIM.

Se si concepisse OV, come la linea evanescente di qualche piano, che passa per l'originale di ABV, essendo $abcd$ parallela alla detta linea evanescente, potrà essa considerarsi come la projezione d'una linea parallela al quadro (*Cor.*2. *Teor.*5.) Onde le parti ab, cd saranno proporzionali alle loro linee originali (*Teor.*4) Ma essendo V il punto evanescente, le originali di Oa, Ob, Oc, Od sono parallele (*Cor.*1. *teor.*3.) Dunque l'originale di CD sta all' originale di AB, come cd è a ab, (*prop.*2. *lib.*6. *elem.*)

Scol. Questa proposizione potrebbe dimostrarsi come la precedente, la quale può essere considerata come un caso particolare, cioè, quando il punto C, di questa proposizione coincide con uno delli punti A, B.

Cor. Si potrebbe trovare il punto D, colla regola, e col compasso: imperocchè le linee Dm, Cs, qg, rA essendo parallele a Da, si avrà la ragione di DC, a DV colle seguenti analogie $DC : DV = Cm : mo$, ma, $mo : Dm = Oc : dc$, dunque $mo = \frac{Oc \times Dm}{dc}$; onde sarà DC :

$DV = Cm : \frac{Oc \times Dm}{dc}, = Cm \times dc : Oc \times Dm$, Di più $Cm : Dm = CO : VO$, dunque $DC : DV = CO \times dc : cO \times VO = Cs \times dc : bc \times VO$, ſoſtituendo in vece di $CO : cO$, la ragione uguale $Cs : bc$. Di più $Cs : VO = BC : BV$, dunque $DC : DV = BC \times dc : bc \times BV$. Ma $bc : qB = ob : OB$, onde $DC : DV = BC \times dc \times BO : BV \times Bq \times bO = CV \times dc \times BO : BV \times Vo \times bo$, per la ſimilitudine delli triangoli BCq, VCO. Inoltre ſono ſimili li triangoli bOa, BOg, onde ſarà $DC : DV = CV \times dc \times Bg : BV \times VO \times ab$. Ma $Bg : VO = AB : AV$, dunque finalmente $DC : DV = CV \times dc \times AB : BV \times AV \times ab$.

PROBL. V.

Eſſendo dato il centro colla diſtanza del quadro, ritrovare la linea evaneſcente d'un piano del quale è data l'interſezione coll'angolo della ſua inclinazione al quadro, e ritrovare ancora il centro e la diſtanza della linea evaneſcente.

Sia AB (*fig.* 9.) l'interſezione data del piano, e, C, il centro del quadro. Si conduca CO, parallela ad AB, ed uguale alla diſtanza del quadro, e ſia CA, perpendicolare ad AB. Di più ſi tiri OS, che tagli AC in S, talmente che l'angolo OSC ſia uguale all'inclinazione del piano originale al quadro. Sia condotta SD, parallela ad AB, ſarà SD, la linea evaneſcente cercata, S il ſuo centro, e OS la ſua diſtanza.

DIM.

DIM.

Immaginiamo il triangolo OSC, alzato ſopra il piano del quadro talmente che OC, ſia perpendicolare al quadro, in queſto caſo ſarà O, il punto di veduta, e SD, eſſendo parallela ad AB, il piano che paſſa per SD, e per il punto O, ſarà il parallelo d'un piano originale qualunque che paſſa per AB, e inclinato al quadro nell'angolo OSC. Onde SD, è la linea evaneſcente cercata; E poichè OS, per la ſuppoſizione, è perpendicolare a SD, ſarà S, il centro, SO la diſtanza della linea evaneſcente SD.

Scol. Prendendo OC, per raggio, CS è la cotangente, e OS la coſecante dell'inclinazione del piano originale al quadro.

PROBL. VI.

Data l'interſezione d'un piano originale colla ſua linea evaneſcente, dato il centro colla diſtanza della detta linea evaneſcente, ed avendo di più le figure originali diſegnate nella loro eſatta proporzione, ritrovare la projezione d'una linea qualunque nel piano originale.

Sia DF (*fig.* 10.) l'interſezione data, HG, la linea evaneſcente della quale il centro ſia S, ſi conduca SO, perpendicolare a GH, e uguale alla diſtanza della linea evaneſcente GH, e ſi concepiſca il piano originale X, abbaſſato ſul qua-

quadro e veduto come a traverso di uno specchio.

Sia Y, il piano parallelo similmente piegato sopra il quadro, e sia AB, la linea originale della quale si cerca la projezione. La retta AB, tagli l'intersezione in D, e sia condotta OG, parallela ad AB, che tagli la linea evanescente in G. Si conduca DG, che sarà la projezione indefinita di AB. Per i punti A, B, siano tirate ad arbitrio le rette AC, BC, le quali si tagliano in C, e si trovino nell'istesso modo le loro projezioni indefinite FI, e EH le quali tagliano DG, in *a*, *b*. Sarà *ab*, la projezione determinata di AB, essendo *a*, la projezione delle estremità A, e, *b*, la projezione dell'estremità B.

In un' altra maniera.

Sia KL, la linea originale data, si ritrovi come di sopra, la sua projezione indefinita QG. Si conducano OK, OL, che tagliano la QG, in *k*, *l*, saranno li punti *k*, *l*, le projezioni delle estremità K, L.

In un altra maniera per mezzo della direttrice.

Sia EF (*fig.* 11.) l'intersezione data, e sia il piano originale talmente abbassato sul quadro, che la linea dirigente si trovi nel piano HI, essendo la distanza tra le linee AF, HI, uguale alla distanza della linea evanescente data. Sia di più il punto di veduta O, trasportato sul quadro assieme col piano dirigente HOI. Si troverà la projezione indefinita d'una linea originale qualunque AB, prolungando la detta linea finchè tagli EF in F, e HI in G. Tirando di poi OG e conducendo F*a*, parallela ad OG, sarà, F*a* la projezione indefinita cercata. Trovando inoltre nell'istessa maniera la projezione indefinita E*d*, d'un altra linea qualunque AD, che passa per A, l'intersezione *a* di questa projezione con F*a*, sarà la projezione di A, e si avrà nell' istessa maniera l' altro punto *b*. Ovvero queste due estremità possono ritrovarsi tirando la linea dalli punti A, B, al punto O, come nella construzione precedente.

D I M.

Si concepiscano le figure piegate (*fig.* 10.) in DF, HG; e (*fig.* 11.) in EF, HI, finchè il piano originale, il suo parallelo, il piano dirigente, e con essi il punto di veduta O, arrivino nel loro proprio sito. Allora il punto D (*fig.* 10.) e, F, (*fig.* 11.) sarà l'intersezione di AB, e, G (*fig.* 11.) sarà il suo punto dirigente, ma OG (*fig.* 10.) è parallela ad AB, e perciò G è il suo punto evanescente, e DG la sua projezione indefinita (*teor.* 3.). F*a*, (*fig.* 11.) è sempre parallela ad OG, che è la direttrice di AB; perciò F*a*, e la projezione indefinita di AB. (*teor.* 5.) E evidente che *a*, trovato per l'intersezione di FI con DG (*fig.* 10.), e di E*d* con F*a* (*fig.* 11.) è la projezione dell'intersezione delle linee originali AB, AC (*fig.* 10.) e di AB, AD (*fig.* 11.) L'altra costruzione colle linee AO, è la medesima

ſima che colle linee AO, CO, per ritrovare li punti *a*, *c*, nella fig. 6. come è ſpiegato nel *cor.* 1. del *Probl.* 2.

Scol. 1. Il lettore poco eſercitato nelle materie Matematiche potrà concepire più facilmente la maniera di traſportare il piano originale, il ſuo parallelo, e il piano dirigente col punto di veduta nel piano del quadro, immaginando (*fig.* 3.) queſti piani traſportati aſſieme allargandoſi li angoli OVB, ODB finchè queſti piani coincidano, e che il piano originale ſia veduto per di dietro.

Scol. 2. Le projezioni *ad*, *kl*, ſono parallele (*fig.* 11.) avendo le loro originali ambedue la medeſima direttrice, conforme al *Cor.* 1, del *teor.* 5. l'iſteſſo ſi può oſſervare in *lm*, e *cd* che hanno la medeſima direttrice OI.

PROBL. VII.

Eſſendo date le medeſime coſe, come nel Problema precedente, ritrovare la projezione d'una figura qualunque.

Si trovino le projezioni delle differenti parti della figura data come nel Problema precedente. Per eſempio, la projezione *klmnp*, (*fig.* 10.) del pentagono KLMNP, ſi trova in queſta maniera. Conducendo OG, OH, OI, OV parallele a KL, LM, MN, KP riſpettivamente, li punti G, H, I, V ſaranno i loro punti evaneſcenti, e le rette KL, LM, MN eſſendo prolungate tagliano DR nelle interſezioni Q, R, T, onde

onde tirando QG, RH, TI, ſi avranno le projezioni *l*, *m*, delli punti L, M, per la loro mutua interſezione. Tirando allora OK, e ON ſi avranno li punti *k*, *n*. Conducendo di più la retta KV al punto evaneſcente V di KP, ſi avrà la projezione indefinita di KP. Finalmente conducendo OP, ſi avrà il punto *p*. Si ritroveranno le projezioni delle figure curvilinee cercando le projezioni di diverſi loro punti, e unendole inſieme. Per eſempio (*fig.* 13. *n.* 1.) eſſendo DE, l'interſezione, e VF la linea evaneſcente, O, il punto di veduta, e ABC, un cerchio originale poſto come nel Problema precedente, la projezione *a*, d'un punto qualunque A può trovarſi conducendo ad arbitrio AD alla quale ſia OV parallela. Tirando allora DV, e OA, eſſe s'incontrano nel punto cercato *a*, ſecondo la coſtruzione del Probl. 6. D, eſſendo l'interſezione, e, V il punto evaneſcente della linea AD. Le diverſe linee AD, eſſendo condotte tutte parallele l'una all'altra, il medeſimo punto evaneſcente V, può ſervire per tutte.

Overo ſia num. 2. VF la linea dirigente traſportata ſul quadro come nella figura 11. rimanendo tutte le altre coſe come ſopra, ſi condura ad arbitrio AD, che taglia DE e VF in D e, V, conducendo allora OV alla quale ſi faccia D*a*, parallela; ſi avrà la projezione *a*, tirando OA, che taglia D*a* in *a*. Adoperando il medeſimo punto V, per tutti i punti A, tutte le linee D*a* ſaranno parallele tra di loro e alla ſteſſa linea OV.

PRO-

PROBL. VIII.

Ritrovare la projezione d'una figura qualunque in un piano parallelo al quadro.

La projezione essendo simile all' originale (*cor*.2. *teor*.4.) si fa un esatta copia della figura originale, e si fanno li lati omologi nella proporzione spiegata *cor*.3. del medesimo teorema.

PROBL. IX.

Essendo data l'interfezione d'un piano, la sua linea evanescente col suo centro, e la distanza, trovare l'originale d'una projezione qualunque data sul quadro.

Sieno le cose disposte nella figura 10. come ne' Problemi 6. 7. sia proposto di ritrovare l'originale della figura *klmnp*. Prolungando le projezioni *kl*, *lm*, *mn*, finchè taglino l'interfezione, e la linea evanescente nelle loro interfezioni Q, R, T, e nelli loro punti evanescenti G, H, I. Sia di più prodotta la *kp*, fino al suo punto evanescente V, siano condotte OG, OH, OI, OV, e QK, RM, TN parallele alle tre prime dette rispettivamente; li punti d' interfezione L, M saranno li punti originali di *l*, *m* siano tirate O*k*, e O*n* che taglieranno QL, e DM, nelli punti originali K, e, N di *k*, *n*. Tirando KP parallela ad OV, e prolungando O*p*, che la taglia in P, sarà P, l'originale del punto *p*. Finalmente conducendo NP, si avrà la figura originale cercata KLMNP.

D I M.

La costruzione è evidente dal Problema 7. che è l'inverso di questo.

Scol. Nella medesima maniera si potrebbe ricercare la figura originale per mezzo delle direttrici come nella fig 11.

PROBL. X.

Essendo date le medesime cose del Problema precedente, ritrovare la lunghezza dell'originale.

Sia I. II. la projezione data (*fig*.10.) restando la figura come nelli Problemi precedenti. Si produca I. II. finchè incontri la linea evanescente nel punto evanescente V, e si conduca VO. Nella linea evanescente si prenda V3 = VO, e si conducano 3I. 3II. che tagliano l'interfezione in 1. 2. Sarà 1. 2. la lunghezza cercata dell'originale di I. II.

D I M.

Sia W l'interfezione di I. II. Essendo V3, uguale ad VO distanza del punto evanescente V, ed W2 essendo parallela ad V3, il punto 3. può essere considerato come il punto di veduta, e W12 e W 12 come la linea originale, e 31. 32. poſſono riguardarſi come li raggi viſuali che formano la projezione I. II.

Cor. La lunghezza 1. 2. potrebbe ritrovarſi colla regola, e col compaſſo facendo 1. 2. : V3. (VO) $= \mathrm{I.\,II.} \times \mathrm{W\,V} : \mathrm{IV} \times \mathrm{IIV}$. Imperocche condotta la retta II. e parallela a 2. 1.

Sarà 3. II. : II. e = 3. 2. : 2. 1. onde 2. 1. $= \frac{3.\,2. \times \mathrm{II.}}{3.\,\mathrm{II.}}$ e di più II e : II. I. = 1. W : IW.

Perciò II. e $= \frac{\mathrm{II.\,I} \times 1.\,\mathrm{W}}{\mathrm{I.\,W.}}$ e conſeguentemente 2. 1. $= \frac{3.\,2. \times \mathrm{II.\,I} \times 1\,\mathrm{W}}{2.\,\mathrm{II.} \times \mathrm{I.\,W}}$. In oltre V3 : 1. W = V I : I W. Dunque V3 $= \frac{1\,\mathrm{W} \times \mathrm{V\,I.}}{\mathrm{I\,W}}$

Dunque 1. 2. : V3. $= \frac{3.\,2. \times \mathrm{II.\,I.} \times 1.\,\mathrm{W} :}{3.\,\mathrm{II.} \times \mathrm{I\,W}}$ $\frac{\mathrm{I.\,W\ \ V\,I.}}{\mathrm{I\,W}} = 3.\,2. \times \mathrm{II.\,I} : \mathrm{V\,I} \times 3.\,\mathrm{II} =$ $\mathrm{III.} \times \mathrm{W\,V} : \mathrm{II.\,V} \times \mathrm{I\,V}$: eſſendo 3. 2. : 3 II. = WV : II. IV.

PROBL. XI.

Data la linea evaneſcente d'un piano col centro e la diſtanza della detta linea, data di più la projezione d'una linea nell'iſteſſo piano, ritrovare la projezione d'un altra linea nel medeſimo piano, che faccia un angolo dato colla prima.

Sia O (*fig.* 10.) il punto di veduta, come nelli Problemi precedenti, GH eſſendo la linea evaneſcente, e *ab*, la projezione data, ſi dimanda di condurre *ac*, talmente che l' originale dell'angolo *bac*, ſia uguale ad un angolo dato. Si produca *ab*, ſino al ſuo punto evaneſcente G. Si conducano GO, OI che facciano l'angolo GOI uguale all'angolo dato. Dal punto I ſi tiri I*ac*, che ſarà la linea cercata.

DIM.

Sia inteſa la figura come nelli Problemi precedenti, e ſia AB, l'originale di *ab*, e conſeguentemente parallela ad OG (*Def.* 15. *teor.* 3.) Per l'iſteſſa ragione, AC parallela ad OI è l'originale di *ac*, eſſendo I il ſuo punto evaneſcente (*teor.* 3.). Ma AB e AC eſſendo parallele a OG, OI, l' angolo BAC, è uguale all' angolo GOI, che è uguale all'angolo dato, per la coſtruzione. Onde l' angolo *bac*, che è la projezione dell'angolo BAC, è ancora la projezione dell'angolo dato.

Scol. Se ſi richiedeſſe l'angolo *abc*, che è la projezione dell'angolo ABC, baſterebbe fare l'angolo GOH, uguale al complemento dell'angolo ABC, a due retti. Imperocchè ſia CB l'originale di *cb*, e conſeguentemente parallela ad OH, (*teor.* 3.)

(*teor.*3.) essendo H il punto evanescente. Di più poichè AC, è parallela ad OI, sarà l'angolo HOI uguale all'angolo BCA. Ma GOI è uguale all'angolo BAC. Dunque tutto l'angolo GOH è uguale al complemento dell' angolo ABC a due retti. (*lib.*1. *elem. prop.*32.)

PROBL. XII.

Data la linea evanescente d' un piano col suo centro e colla distanza; di più data la projezione d'un lato d'un triangolo dato di specie, ritrovare la projezione di tutto il triangolo.

Le projezioni cercate delli altri lati si ritrovano per li problemi precedenti, essendo dati li angoli del triangolo. Data la projezione *ab*, (*fig.*10.) del lato AB, nel triangolo ABC, si ritrova il punto evanescente I del lato *ac*, facendo l'angolo IOG uguale all'angolo CAB, e si ha il punto evanescente H del lato *bc*, prendendo l' angolo HOG uguale al complemento dell'angolo CBA a due angoli retti.

Scol. Se il punto evanescente della linea data *ab*, fosse troppo lontano, si potrebbe procedere in quest'altra maniera. Prendendo per intersezione una linea qualunque DR, parallela alla linea evanescente HG (*teor.*6.) e conducendo due linee H*b*E, I*a*F ad arbitrio per *b*, e, *a*, si trovino li originali A, B delli punti *a*, *b*, (*Probl.*9.) e si conduca AB. Di poi sopra il lato

lato AB, si finisca il triangolo originale, e si ritrovino le projezioni cercate delli altri lati (*Probl.*7.)

PROBL. XIII.

Data la linea evanescente d' un piano col suo centro e colla distanza. Data ancora la projezione d'un lato d'una figura qualunque in questo piano, ritrovare la projezione di tutta la figura.

Si divida tutta la figura data in triangoli col mezzo delle diagonali, e si ritrovino le projezioni di tutti questi triangoli (*Probl.* 12.) principiando da quelli che hanno la linea data per uno dei loro lati.

Si può fare l'istesso in diverse maniere, applicando li problemi precedenti, secondo che riuscirà più commodo nelli diversi casi, come si capirà meglio dalli Esempj seguenti.

ESEMPIO I.

Sia IK la linea evanescente (*fig.*14.) della quale sia S il centro, e OS la distanza. AB parallela ad IK sia la projezione data del lato d'un esagono regolare. Si conduca OG parallela ad IK (*Def.*15.) l'originale di AB essendo parallela al quadro (*Cor.*2. *Teor.*5.) li punti evanescenti H, I, K delli lati, e delle diagonali BC, FE, AD, AF, BE, CD, AC si troveranno (*per il probl.*11.) facendo li angoli HOG di 60°, IOG

 di

di 120°, KOG di 30°. Conducendo di poi AK, BH, si avrà il punto C. Tirando AH, CI si avrà il punto D. Conducendo DE parallela ad IK, e tirando AS, si avrà il punto E; imperocchè S è il punto evanescente di AE, l'originale dell'angolo EAB, essendo un angolo retto per la natura dell'essagono, come anche è retto GOS, e l'originale di AB essendo parallela al quadro. Finalmente tirando EH, e AI si ha il punto F, ed è compita la figura cercata.

ESEMPIO II.

Sia MRPTQS (*fig.* 15.) l'iconografia d'un icosaedro regolare appoggiato sopra una delle sue facce, si troverà la sua projezione, essendo data la projezione *ab* del lato AB, e VX essendo la linea evanescente, e, O il punto di veduta, come nelli problemi precedenti. L'iconografia originale si descrive facendo due essagoni regolari concentrici, e paralleli AFBICH, RMSQTP, delli quali i lati omologi siano nella proporzione delle parti d'una linea tagliata in media, e estrema ragione (*Def.* 3. *lib.* 6. *Elem.*), e conducendo le linee, come si vede nella figura. Questa costruzione è evidente dalla propos. 16. del libro 13. delli elementi. Avendo prolungato *ab* fino al suo punto evanescente V, li punti evanescenti W, e X delli due altri lati del triangolo *abc* si ritrovano per il Probl. 11. Dipoi conducendo ad arbitrio SP parallela ad VX, e tirando W*a*, e W*b*, che

che la tagliano in *a*, *b*, e dividendo *ab* in *k*, *d*, *e*, *l* nella medesima proporzioue di AB, nei punti K, D, E, L; tirando di più KW, *a*W, *e*W, *l*W si avranno le projezioni *k*, *d*, *e*, *l* delli punti K, D, E, L (*Probl.* 3.) conducendo *d*X, *e*W, e *e*X si avranno li punti *f*, *g*. Conducendo *g*V si avranno li punti *h*, *i*. Tirando KX, e LW si hanno il punto *m*, ed il punto *n*, che è la projezione di N per l'intersezione di KX, e di LW già tirata. Facendo dipoi *do*, e *op* ogn'una uguale a *md*, e conducendo *o*W, *p*W, si hanno li punti *o*, *p* (*Probl.* 3.) tirando *p*V si ha il punto *q* per la sua intersezione con *l*W. Condotte *o*W, e *n*V si ha *r*, e facendo *ms* ugule ad *md*, tirata *s*W, si ha *s*. Finalmente conducendo *s*X, che taglia *ro*W, si avrà il punto *t*. Il restante della figura si avrà congiungendo li punti già trovati, come sarà evidente per la costruzione, avendo in questa tralasciato diverse linee per evitare la confusione.

ESEMPIO III.

Se si cercasse come nella fig. 16. la projezione dell'iconografia d'un dodecaedro regolare, avendo la projezione d'un lato dato, si dovrebbe ritrovare la figura originale per il probl. 9., e di poi si opererebbe per mezzo del probl. 7. Sarà facile al lettore di compire la detta projezione; osservando solamente, che l'iconografia originale si ha, descrivendo due decagoni concentrici, e paralleli, delli quali i lati omologi sono li segmenti d'una d'una linea divisa in media, ed estrema ragione. Quest'istesso caso sarà considerato, e sciolto in appresso.

ESEMPIO IV.

Sia DC la linea evanescente (*fig.* 17.), O il punto di veduta, come nelli problemi precedenti, si troverà la projezione ANBMLP d'un' ottaedro regolare, essendo data la projezione d'uno delli lati AB. Prolungando AB fino al suo punto evanescente C; il punto evanescente G delli lati AK, e NM, si trova per il problema 11., facendo l'angolo COG = 60°. Di poi (*per il Probl.* 10.) presa una linea qualunque *bl* parallela a CD per intersezione, e facendo CD = CO, e GH = GO, si conducano DA, DB, che tagliano *bl* in *a*, *b*. Si tiri HA, che taglia *bl* in *a*, e presa *al* = *ab*, si conduca LH, che taglia AG in L, si avrà la projezione AL, essendo la sua originale uguale ad *al*, e conseguentemente all'originale di AB, essendo *al*, e *ab* uguali. Dividendo poi *ab*, e *al*, ognuna in tre parti uguali colli punti *e*, *f*, *i*, *k*, e conducendo *e*D, *f*D, *i*H, *k*H, si avranno li punti E, F, I, K (*per il Probl.* 3.). Tirate le linee FG, KH, EI, si avranno li punti M, N, P, che finiscono la figura.

PROBL. XIV.

Dato il centro del quadro, e data la distanza colla linea evanescente del piano, ritrovare

vare il punto evanescente delle lineè perpendicolari al medesimo piano.

Sia AB (*fig.* 18.) la linea evanescente data, e sia C il centro del quadro. Si conduca CA perpendicolare ad AB, alla quale si faccia parallela CO uguale alla distanza del quadro. Si tiri AO, alla quale si alzi la perpendicolare OD, che tagli CA in D, punto evanescente cercato.

DIM.

Immaginiamo il triangolo AOD rivolgersi sul piano della figura, talmente che CO arrivi ad essergli perpendicolare, essendo O il punto di veduta. Ciò supposto, il piano che passa per il punto O, e per la linea AB, sarà il parallelo del piano originale; la linea OD sarà perpendicolare al detto parallelo, e conseguentemente sarà la parallela delle linee perpendicolari al piano originale. Onde sarà D il punto evanescente di queste perpendicolari. (*Def.* 17.)

Cor. 1. Se la linea evanescente AB passa per il centro del quadro, cioè, se il piano originale è perpendicolare al quadro, il punto D sarà infinitamente distante, la linea OD essendo parallela ad AD, e le projezioni delle linee perpendicolari al piano proposto saranno tutte perpendicolari ad AB, poichè incontrano la linea AC perpendicolare ad AB in una distanza infinita; onde saranno parallele tra di loro. Ciò è evidente per un' altra ragione, essendo le linee originali parallele al quadro.

Cor.1. Se il piano originale è parallelo al quadro, la distanza CA diventerà infinita; onde OA sarà parallela a CA, e OD coinciderà con OC, cadendo il punto D nel centro del quadro C, conforme al Cor.2. del Teor.3.

Cor.3. E' evidente per la similitudine delli triangoli AOC, AOD, che la retta CD è terza proporzionale ad AC, e CO; come ancora AD è terza proporzionale ad AC, e AO.

Cor.4. OD è la distanza del punto evanescente D.

PROBL. XV.

Dato il centro, e data la distanza del quadro, ritrovare la linea evanescente delli piani perpendicolari a quelle linee, che hanno un punto evanescente dato; e di più ritrovare il centro, e la distanza della detta linea evanescente.

Sia C il centro del quadro (*fig*.18.), e D il punto evanescente dato. Si conduca DC, alla quale si alzi la perpendicolare CO uguale alla distanza del quadro. Si tiri DO, alla quale si faccia OA perpendicolare, che taglia DC in A. Sia condotta AB perpendicolare a DC, essa sarà la linea evanescente cercata, A il suo centro, (*Teor*.1.) e OA la sua distanza.

Questa costruzione è evidente dal problema precedente, ed è ancora manifesto, che se ne possono ricavare i medesimi Corollarj.

PROBL. XVI.

Dato il centro colla distanza del quadro, tirare per un punto dato la linea evanescente d'un piano perpendicolare ad un altro piano, del quale la linea evanescente è data, e ritrovare la distanza, ed il centro di questa linea evanescente.

Sia AB (*fig*.18.) la linea evanescente data, C il centro del quadro, E il punto dato. Si trovi il punto evanescente D delle linee perpendicolari alli piani originali di AB (*Probl*.14.). Sia condotta DE, che sarà la linea evanescente cercata. Si conduca CF perpendicolare a DF, sarà F il centro della linea evanescente DE (*Teor*.1.). Si faccia un triangolo rettangolo, del quale un lato sia CF, e l'altro sia la perpendicolare uguale alla distanza del quadro, l'ipotenusa sarà la distanza della linea evanescente DE (*Cor. Teor*.1.)

DIM.

Poichè il piano del quale si cerca la linea evanescente è perpendicolare all'altro piano, la sua linea evanescente deve passare per il punto evanescente, D, delle linee perpendicolari a quest'altro piano, essendo alcune di queste linee nel piano cercato. Onde DE è la linea evanescente cercata. Le altre parti della costruzione sono evidenti.

*Cor.*1. Se la linea FC è prolungata finchè tagli la linea evanefcente data in B, farà B il punto evanefcente delle linee perpendicolari al piano originale della linea evanefcente DE. Imperocchè quefto punto evanefcente è nella linea FC (*Probl.*14.), ed è anche nella linea evanefcente data (*per la dimoftrazione*).

*Cor.*2. Se le linee evanefcenti AB, DE fi incontrano in G, li punti B, D, G faranno li punti evanefcenti delli tre lati dell'angolo folido del cubo, che fono perpendicolari tra di loro. E conducendo DB, faranno BG, GD, DB le linee evanefcenti delli tre piani, che formano quefto angolo folido.

Cor. 3. La diftanza della linea evanefcente DG è uguale alla linea FP, che è la perpendicolare alzata ful diametro DG d'un cerchio, che paffa per il punto P. Imperocchè fe fi concepifce il piano del triangolo DOC alzato perpendicolarmente ful piano DBC, l'ipotenufa condotta dal punto O in F farà la diftanza della linea evanefcente, e quefta diftanza farà perpendicolare in F, (*prop.*12. *lib.*XI. *elem.*). Di più le tre linee DG, GB, DB effendo le linee evanefcenti di tre piani perpendicolari l'uno all'altro, tirando dalli punti D, G, due linee concorrenti in O, farà l'angolo DOG, retto. Onde il punto O, farà nella circonferenza d'un cerchio defcritto ful diametro DG, e per confeguenza la perpendicolare FP, al diametro DG, incontrando la circonferenza in P, farà uguale alla perpendicolare FO, cioè alla diftanza della linea evanefcente.

PROBL. XVII.

Dato il centro, e data la diftanza del quadro col punto evanefcente della commune interfezione di due piani inclinati l'uno all'altro in un angolo dato; data di più la linea evanefcente di uno delli detti piani, ritrovare la linea evanefcente dell'altro.

Sia C, il centro del quadro (*fig.*18.) BG, la linea evanefcente di uno dei piani, B il punto evanefcente della commune interfezione di ambedue, H l'angolo d'inclinazione. Si ritrovi la linea evanefcente GD, delli piani perpendicolari alle linee, delle quali il punto evanefcente è B (*probl.*15.). Da quefta linea evanefcente, GD, fia tagliata in, G, la linea evanefcente data. Si trovi in, GD, il punto evanefcente E, delle linee che fanno l'angolo dato H, colle linee delle quali, G, è il punto evanefcente (*probl.*2.); cioè in BCF, perpendicolare a GFD, fi prenda FP, uguale alla diftanza della linea evanefcente GD, trovata per il problema 15. Si conducano PG, PE che fanno l'angolo FPG uguale all'angolo H. Si conduca BE, che farà la linea evanefcente cercata.

DIM.

D I M.

Immaginiamo il triangolo GPE, rivolgersi sulla linea GE, talmente che il punto P, sia nel punto di veduta perpendicolare al centro del quadro C. In questo caso li piani BPG, GPD, DPB, saranno li paralleli di tre piani originali, delli quali le linee evanescenti sono BG, GD, DB, il piano che ha per linea evanescente DG, essendo perpendicolare alli due altri piani; poichè è perpendicolare alla loro commune interfezione, della quale è B, il punto evanescente. Onde li piani originali che hanno per linee evanescenti BG, BD, sono inclinati l'uno all'altro nell'angolo EPG, cioè nell'angolo H; imperocchè l'inclinazione di due piani è sempre misurata in un piano perpendicolare alla loro commune interfezione. Onde BG, essendo la linea evanescente data, sarà BE la linea evanescente cercata.

Cor. Il centro della linea evanescente BE, si ritrova, alzando dal punto C, una perpendicolare alla detta linea evanescente (*teor.* 1.) Di poi si ritrova la distanza della medesima linea evanescente, come è stata trovata la distanza PF, nel probl. 16.

P R O B L. XVIII.

Dato il centro, e data la distanza del quadro colla linea evanescente d'una delle facce d'un solido proposto qualunque. Data di più la projezione d'una linea in questa istessa faccia, ritrovare la projezione di tutta la figura.

Si ritrovi per mezzo della projezione data la projezione dell'iconografia della figura proposta sul piano della faccia, della quale è data la linea evanescente(*probl.* 13.)Di poi(per il *probl.* 16.) si ritrovi la linea evanescente del piano dell'ortografia, e si descriva la projezione dell'ortografia per mezzo delle linee già date nell'iconografia (*probl.* 13.). Finalmente colle interfezioni delle projezioni delle perpendicolari all'iconografia, e all'ortografia, si troveranno diversi punti della projezione cercata.

In un'altra maniera. Essendo data la projezione d'una faccia della quale è data la linea evanescente, per mezzo della projezione della linea data si ritrovino le linee evanescenti delle facce contigue (*probl.* 17.), e si descrivano le loro projezioni per mezzo delle linee date nella projezione della prima faccia, e si continui nell'istessa maniera finchè sia terminata la projezione cercata.

Ho dato nelle proposizioni precedenti un metodo generale per ridurre in perspettiva qualunque figura proposta, ma si possono in prattica adoperare alcuni spedienti più brevi secondo la natura delli problemi proposti. Come si vedrà dalli esempj seguenti.

ESEM-

ESEMPIO V.

La figura 19. rappresenta la projezione d'un dodecaedro regolare per mezzo dell'iconografia, e ortografia, essendo data la projezione AB, d'un lato parallelo al quadro; la retta FG, parallela ad AB, essendo la linea evanescente data della faccia ABCDE, F il centro della detta linea evanescente, H il centro del quadro, è H*o* la distanza. Per evitare la confusione delle linee, sono state messe a parte l'iconografia, e l'ortografia ritrovate nella maniera seguente.

Sia condotta ad arbitrio, *ab*, parallela ad AB, e ad una distanza sufficiente, tirando IA, e IB, che tagliano *ab*, in *a*, e, *b*, la linea AB, è trasferita in *ab*, essendo I il punto evanescente delle linee perpendicolari alla faccia ABCDE della quale la linea evanescente è FG, ritrovata (*per il probl.* 14.) Il che essendo fatto, tutta l'iconografia si descrive sulla linea *ab*, (*per il probl.* 13.), come è descritta nel 3. esempio.

Quanto all' ortografia, la retta IHF, che passa per lo centro del quadro si sceglie come più opportuna per la sua linea evanescente, l'ortografia essendo più semplice in questo caso, e le projezioni delle linee, che sono perpendicolari al quadro essendo tutte perpendicolari ad FI (*cor.* 1. *probl.* 14.). Si conduca GA dal punto evanescente G della linea, *ae*, nell'iconografia, e si tiri *el*, che la taglia in E, si avrà la projezione AE. Di poi con-

conducendo A*a*, E*e*, tutte due parallele a GF, e che rappresentano, come si è già detto, le perpendicolari all'ortografia, si tiri ad arbitrio *ae*, che passa per F, e che le taglia in *a*, *e*, si avrà la linea *ae*, colla quale si descrive tutta la projezione dell'ortografia (*per il probl.* 13.).

Essendo date le projezioni dell'iconografia, e dell' ortografia, si avrà un punto qualunque K della projezione cercata conducendo K*k* parallela ad FG, e tirando KI dalli punti corrispondenti K, *k*, queste due linee s'incontreranno nel punto cercato K.

Per l'intelligenza della projezione del cubo rappresentata in questa figura, basta avvisare il lettore, che FG, FI, sono due linee evanescenti del detto cubo, e che la terza è una linea, che passa per I, parallela ad FG.

Quanto alle ombre, che sono supposte tramandate dal Sole sul piano della faccia ABCDE del dodecaedro; l'ombra *uV*, d'una linea qualunque V*u*, si ritrova nella maniera seguente; G è il punto evanescente dato di tutti i raggi di luce, li quali partendo dal Sole sono considerati come paralleli. Onde IS, che passa per lo punto evanescente I della linea V*u*, e per lo punto evanescente S delli raggi, è la linea evanescente del piano composto di tutti i raggi, che passano per la linea *uv*, e che formano l'ombra *vu*, e IS tagliando in S la linea evanescente FG, del piano sopra il quale l'ombra è mandata, sarà S, il punto evanescente dell'ombra *vu*, che è l'interfezione del piano no dell'ombra, del quale la linea evanescente è *Is*, e del piano, sopra il quale l'ombra è mandata, essendo *s*, il punto evanescente di questa intersezione (*cor.*2. *teor.*7.) perciò condotta *vs*, e tirata VS, che la taglia in *u*, sarà *vu*, l'ombra della linea *u*V.

Scolio. Nell'originale dell'ortografia li punti *e*, *m*, *s*, *p*, sono gli angoli d'un quadrato. Le linee *on*, *al*, *qr*, essendo parallele ad *em*, e *oq*, *nr*, essendo parallele ad *ep*, e uguali ad *al*, saranno uguali le linee, *tk*, *on*, *qr*, e le linee *on*, *em*, *al*, saranno in continua proporzione geometrica del minore al maggiore segmento d'una linea divisa in estrema, e media ragione. Questo scolio si ricava facilmente dalla *prop.*17. *del lib.*13. delli elementi. Per evitare la confusione della figura sono state tralasciate alcune linee citate nell'esempio presente.

ESEMPIO VI.

Nella figura 20. la linea evanescente della terra sopra la quale si appoggia la fabbrica è AICKB, che passa per il centro del quadro C, la distanza del quadro essendo uguale a CO. BG, e AH, sono le linee evanescenti dei piani retti, *abde*, DEN, e *abc*, DF*nm*; G, e H, essendo li punti evanescenti delle linee *be*, e *nm*, che toccano li più alti angoli dei due scalini, e perciò HG, BH sono le linee evanescenti dei piani, che toccano il più alto, e il più basso orlo della scala.

Il

Il lato dato *br*, della base del tetraedro regolare è parallelo alla linea evanescente AB. Il punto *u*, che è la projezione del centro della base *brp*, e la posizione del vertice *o*, si ritrovano conducendo, *pq*, parallela ad AB, e I*r*, che l'incontra in *q*, e tirando C*p*, e *bq*, che la taglia in *u*, la linea C*d*, perpendicolare ad AB, è la linea evanescente d'un piano perpendicolare alla base *brp*, che stà sopra *up*, e passa per la linea *po*, della quale il punto evanescente è *l*, ritrovato (*Probl.*11.) facendo CQ uguale alla distanza del quadro, e l'angolo, *d*QC, uguale all' originale di *upo*. La linea, VX, è la linea evanescente della faccia, *upr*, colla quale si descrive quella faccia, essendo data, *pr*, (*Probl.*11.) come è stata descritta la faccia, *brp*, sopra *br*. L'ottaedro regolare, e l'icosaedro si descrivono per mezzo della loro iconografia, e ortografia, il quale metodo è sufficientemente spiegato nell' esempio precedente. Voglio solamente avvisare il lettore, che nell' ortografia ABCDEFGH, dell'icosaedro, le linee CD, AF, GH, sono uguali, come anche le linee AC, FD, BE, che AF, è a BE, come è il minore al maggiore segmento d' una linea divisa in estrema, e media ragione, come si ricava dalla Prop.16. del lib.13. delli elementi.

La luce essendo supposta venire dal Sole, i raggi sono paralleli al quadro, e alla linea AM, talmente che l'ombra, P, d'un punto qualunque, D, si trovi tirando per la sua posizione la

D linea,

linea, NP, parallela ad AB, e DP, parallela ad AM, che la taglia in *l*. Quanto all' ombra del tetraedro, la quale si alza verso l'estremità dello scalino, avendo nella medesima maniera trovato il punto *s*, che sarebbe l' ombra del punto, *o*, sulla terra, se non vi fosse la scala, e conducendo *sb*, *sp*, si avranno le ombre *bo*, e *po*. Si faccia, che *su*, e *sp*, taglino l'orlo il più basso della scala in *y*, e, *x*, tirando allora, *xt*, perpendicolare ad AC, e che taglia, *os*, in *t*, si avrà l'ombra, *t*, del vertice, *o*, sull'estremità delli scalini, e condotta, *xt*, si avrà la parte dell'ombra di *op*, che cade sopra la detta estremità. Nell'istessa maniera si ritrova l'ombra di *ob*. Tutti li raggi essendo paralleli ad AM, ed, A, essendo il punto evanescente di, DF, AM è la linea evanescente del piano formato dalli raggi, che passano per la linea DF, e BM, essendo la linea evanescente del muro, sopra il quale è tramandata l' ombra F*f*, M è il punto evanescente della commune interfezione di questi due piani, cioè dell'ombra, F*f*, della linea D*f*.

ESEMPIO VII.

Nella figura 21. la retta, ACB, che passa per il centro del quadro C, è la linea evanescente della terra; H, è il punto evanescente dell'orlo, FF, sopra il quale è appoggiato un trave, e le altre estremità si suppongono parallele a questa; D, è il punto evanescente dell'orlo GH, e DB,

e DB, che è perpendicolare ad AB, è la linea evanescente del piano EGH; P, Q, sono i punti evanescenti dei lati MK, KN d' un tetraedro regolare, e conseguentemente, PQ, è la linea evanescente del triangolo KNM, *l* è la luce, e, A, la sua posizione. Avendo BE*g*, cioè, l'interfezione del piano retto EGH col sito, si avrà il punto, *g*, in cui la retta EGH, incontra la terra, e che è l'interfezione di HG colla terra. BE, taglia l'estremità, SR, della muraglia SR*b*, in R, e conseguentemente R*b*, perpendicolare ad AB, è l' interfezione del muro col piano EGH, e perciò il punto, *b*, in cui s'incontrano R*b*, e GH, è l' interfezione della linea GHI colla muraglia. DL*l*, è la projezione d'una linea parallela all'originale di GH, essendo, D, il punto evanescente, e B*l*, è la sua posizione; onde, *l*, è la sua interfezione colla terra. Le originali di, L*l*, e HG, essendo parallele, esse stanno nel medesimo piano, cioè, nel piano, che forma l'ombra di HS. Ma, *lg*, rappresenta l' interfezione di questo piano colla terra; onde, *lg*, prolungata è una parte dell'ombra, e tirando, *l*G, che la taglia in, *g*, sarà, *g*, l'ombra di, G, e *g*G, sarà la parte dell' ombra di, HG, che arriva sulla terra. Conducendo allora, *sb*, e tirando *l*H, che la taglia in *b*, sarà, *bs*, l' altra parte dell' ombra verso il muro.

Condotte, *gp*, e DT, ambedue parallele ad AB, saranno, D*g*, *gp* le projezioni di due linee in un piano del quale, DT, è la linea evanescente, e, T, è il punto evanescente della commune intersezione di questo piano col piano del triangolo KMN (*cor.2. teor.7.*), essendo, PQT, la sua linea evanescente. Onde tirando T*p*, che taglia, *g*D, in V, sarà V l'intersezione della linea, gGHD, col piano di questo triangolo KMN. Allora, *lg*, tagliando MK in, *r*, condotta, *rt*V, sarà, *rt*, la parte dell'ombra di GH, che cade sopra il triangolo KMN.

Avendo spiegato la maniera di ritrovare l'ombra di, GH, il restante non ha bisogno di altra spiegazione.

ESEMPIO VIII.

Nella fig.22. C, è il centro del quadro, CH, la linea evanescente del sito, e della superficie dell'acqua, l'ombra della quale produce le riflessioni della figura; S è il punto evanescente dei raggi di luce, i quali sono supposti venire dal Sole.

L'ombra della perpendicolare, BD, si trova in questa maniera. Condotta, SA, perpendicolare a, CA, si ha il punto evanescente, A, dell'ombra sul sito BF. Di poi si prenda un punto qualunque, E, nella circonferenza della base del cilindro, la quale è parallela al quadro, essendo l'asse perpendicolare al quadro, ed essendo C, per conseguenza il punto evanescente. Si trovi la posizione del detto punto E sul sito, *e*; si conduca, CE, e si tiri, C*e*, che taglia BA in *f*, allora

lora condotta *f*P perpendicolare a CA, e che taglia CE in, P, si avrà un punto *p* dell'ombra sulla superficie del cilindro. Nella medesima maniera si avranno tutti li punti dell'ombra. Per dimostrare questa costruzione, basta che il lettore consideri, che l'originale di *e*EPF*e*, è un piano retto, che taglia il cilindro in, EP, e, *f*P, è l'ombra di BD sù questo piano. Onde, P, è il punto ove cade quest'ombra sulla superficie del cilindro. Si trova in questa maniera un punto qualunque, Q, dell'ombra della circonferenza del cilindro interiore sulla sua superficie. Si conduca, CS, alla quale si tiri ad arbitrio la parallela, GH, che taglia questa circonferenza in G, e H. Tirata, GS, e condotta CH, che la taglia in, Q, sarà, Q, il punto cercato; imperocchè, C, essendo il punto evanescente dell'asse del cilindro e di CH, HQ è nella superficie del cilindro, e GH, essendo parallela a, CS, è la projezione d'una linea parallela al quadro, in un piano del quale, CS, è la linea evanescente, e la sua originale essendo parallela al quadro è nella base d'un cilindro, che è parallelo al quadro. Onde le originali di, HS, HC, e GS, essendo nel medesimo piano, sarà Q, la projezione del punto in cui li raggi di luce dei quali la projezione è GS, tagliano la superficie del cilindro, cioè Q è la projezione dell'ombra dell'originale del punto G, nella circonferenza della base sulla superficie interiore del cilindro.

Il punto, *b*, eſſendo la poſizione del punto, D, ſulla ſuperficie dell' acqua, ſi trova la riflesſione, *a*, del punto, D, continuando la perpendicolare, D*b*, finchè, *bd*, ſia uguale a *b*D; ciò è evidente per le leggi della riflesſione, imperocchè la rifleſſione fa comparire l'oggetto nella parte oppoſta del piano riflettente nella ſteſſa maniera, che l'oggetto ſtà dall'altra parte del medeſimo piano. Perciò prendendo in AS, la retta A*s*, uguale ad AS, ſi trova un punto qualunque *q*, nell' ombra ſulla ſuperficie del cilindro interiore nella medeſima maniera, che ſi ritrova, Q, nella figura reale, adoprando il punto, *s*, in vece di S.

L'ombra del cilindro ſulla ſuperficie del cono ſi ritrova nell' iſteſſo modo come l' ombra della linea, BD, ſulla ſuperficie del cilindro.

Scol. Si deve oſſervare, che nelli eſempj precedenti io ho conſiderato le ombre ſolamente come projezioni di figure date ſopra una data ſuperficie per mezzo di punti luminoſi dati. Imperocchè conſidero il corpo luminoſo come un punto, per sfuggire le difficoltà alle quali ſarebbe ſoggetta la deſcrizione delle ombre, ſe ſi metteſſe in conſiderazione la grandezza del corpo luminoſo, ed eſſendo ſufficiente per la prattica della perſpettiva di conſiderare il centro del corpo luminoſo. Avendo trovato in queſta ſuppoſizione il contorno dell' ombra, ſi potrà deſcrivere la penombra, più coll'ajuto di eſattiſſime oſſervazioni, che colli precetti dell'arte, eſſendo difficile,

ficile di portare ogni coſa ad una eſattiſſima coſtruzione matematica, almeno quanto ſarebbe conveniente per la prattica. Ma un' artiſta ben' iſtruito della perſpettiva potrà ſupplire ſufficientemente alla teorìa nelli caſi, che richiedono maggiore eſattezza. Del reſto ſi vede, che la dottrina delle ombre conſiderate, come ho detto, ſi riduce alli principj communi della perſpettiva.

ESEMPIO IX.

Nella figura 23. eſſendo tutto facilmente inteſo da quel che è ſtato già ſpiegato, io dimoſtrerò ſolamente il modo di ritrovare in uno ſpecchio la rifleſſione d'un quadro immmaginato ſul cavalletto del pittore. A, è il centro del quadro, AB, la linea evaneſcente del ſito, la diſtanza del quadro eſſendo uguale ad AB. AC è la linea evaneſcente del quadro ſul cavalletto, e CD la linea evaneſcente dello ſpecchio. Per lo punto, *a*, in cui l' orlo, *ba*, del piede della tavola incontra la ſuperficie della medeſima, ſi tiri *ae*, e per lo punto, *b*, ſi tiri, *bd*, ambedue parallele ad AB, la retta, *bd*, incontrerà l' interſezione, *cd*, della ſuperficie del quadro col ſito in, *d*, e conducendo *de* parallela ad AC, e che taglia, *ae*, in, *e*, condotta, A*e*, ſi avrà la projezione A*e*, della commune interſezione della ſuperficie della tavola, e del quadro; imperocchè, *ae*, eſſendo parallela ad, AB, eſſa è la projezione d'una linea nella superficie della tavola, parallela al quadro, e per l'istessa ragione, *bd*, è la projezione d'una linea sopra il sito, e, *de*, è la projezione d'una linea nel piano del quadro, e queste due linee sono parallele al quadro, siccome ancora, *ab*, è la projezione d'una linea parallela al quadro. Onde, *abde*, è la projezione d'un trapezio parallelo al quadro, l'angolo del quale, *e*, è la commune interfezione della superficie sulla tavola, e del quadro sul cavalletto. Ma, A, essendo la commune interfezione delle linee evanescenti di questi due piani, è il punto evanescente della loro commune interfezione, e perciò, *e*A, è la projezione di questa interfezione (*cor.*2. *teor.*7.). Per l'istessa ragione, essendo, *o*, la projezione d'un punto, in cui la superficie del vetro tocca la tavola, ed, E, essendo la commune interfezione delle linee evanescenti, AB, e, CD, sarà, O*e*, la projezione della commune interfezione della superficie della tavola, e della superficie del vetro. Onde il punto, *f*, interfezione di, *o*E, e, *e*A, è la projezione del punto nel quale s'incontrano questi tre piani, cioè, della superficie della tavola, del vetro, e del quadro. Onde tirando, *f*C, essa sarà la projezione della commune interfezione del quadro, e dello specchio.

Avendo trovato il punto evanescente, P, delle linee perpendicolari al piano dello specchio del quale la linea evanescente è CD (*Probl.*14.), e conducendo, PA, per il punto evanescente, A, della

della linea, GH, e che taglia CD in D, sarà D, il punto evanescente della posizione di GH sopra il piano del vetro. Onde GH tagliando, C*f*, in, *i*, sarà, D*i*, la projezione di questa posizione. Di più tirando GP, che taglia, D*i*, in *k*, sarà, *k*, la posizione del punto, G, sul vetro. Perciò sopra, GP, si prenda, *kg*, per rappresentare una linea uguale a quella, che viene rappresentata per, G*k*, (*Probl.*3.) sarà, *g*, la projezione della riflessione di, G, e, G*i*, è la riflessione di G*i*, e conducendo, PH, che taglia, *gi*, in, *h*, sarà, *gh*, la riflessione di GH. Nella medesima maniera si troveranno qualunque altre linee nella riflessione.

Può ancora descriversi la riflessione del quadro per mezzo della sua linea evanescente nell' istessa maniera, che è stata descritta la projezione del quadro medesimo; imperocchè in PAD preso, *a*D, per rappresentare una linea uguale alla linea rappresentata per, AD, sarà, *d*, il punto evanescente della linea riflessa, *gh*, e, C*a*, è la linea evanescente del quadro riflesso.

Fine della Prima Parte.

PAR-

PARTE SECONDA

Della maniera di ritrovare le figure originali dalle loro projezioni date, e della situazione necessaria per considerare le projezioni particolari.

PROBL. XVIII.

Data la projezione d'una linea divisa, e il suo punto evanescente, ritrovare la proporzione delle parti dell'originale.

Sia AB (*fig.*7.) la projezione data, divisa in C, ed V il suo punto evanescente. Si conduca ad arbitrio VO, alla quale si faccia, *ab*, parallela. Da un punto qualunque O, nella linea OV, si tirino le linee OA, OB, OC, che tagliano, *ab*, in *a*, *b*, *c*. Sarà l'originale di AC, all'originale di, CB, come *ac*, è a *cb*.

Cor. $ac : bc = AC \times BV : BC \times AV$.

PROBL. XIX.

Essendo data la projezione d'una linea divisa in due parti, e la proporzione dell'originale, ritrovare il suo punto evanescente.

Sia, AB, la projezione data divisa in C. (*fig.*7.) per lo punto, C, si conduca ad arbitrio, *aCb*, ed in essa si prenda *aC*, a, *Cb*, come l'originale di AC è all'originale di CB, e si conducano, A*a*, B*b*, che s'incontrano in *o*. Si tiri, OV, parallela ad, *ab*, che taglia AB in V, che sarà il punto evanescente cercato.

Cor. $BV : BA = Ca \times CB : Cb \times AC - Ca \times CB$. Questi due problemi colli loro corollari sono evidenti per il problema 3., e suoi corollari.

PROBL. XX.

Essendo data la projezione d'un triangolo colla sua linea evanescente, il suo centro, e la distanza, ritrovare la specie del triangolo originale.

Sia, *abc*, (*fig.*10.) la projezione data, HG, la sua linea evanescente, S, il suo centro, e SO, perpendicolare ad, HG, ed uguale alla sua distanza. Avendo prolungato li lati della projezione data, finchè taglino la linea evanescente nelli loro punti evanescenti G, H, I, si conducano GO, GH, e GI, li originali delli angoli *bac*, *ab*H, *acb*, saranno uguali a GOI, IOH, GOH rispettivamnete (*Probl.*2.). Onde è data la specie del triangolo originale.

PROBL. XXI.

Essendo data la projezione d'un triangolo d'una specie data, e la sua linea evanescente, ritrotrovare il centro, e la diſtanza di queſta linea evaneſcente.

Sia ABC (*fig.* 12.) la projezione data, e FD la ſua linea evaneſcente. Siano prolungati i lati della projezione, finchè taglino la linea evaneſcente nelli loro punti evaneſcenti, D, E, F. Si divida DE, EF, in G, e H, e ſi conduca GI, e HK perperpendicolare ad FD, facendo GI a GE come il raggio è alla tangente dell'angolo rappreſentato per BAC. Si faccia di più KH a EH, come il raggio è alla tangente dell'angolo rappreſentato per BCA, talmente che, EIG, e FKH ſiano uguali alli detti angoli. Dalli centri I, K, colli raggi IE, KE, ſi deſcrivano due cerchi, che ſi tagliano in O, e ſi conduca, OS, che taglia, FD, ad angoli retti in S, ſarà, S, il centro; e, SO, la diſtanza cercata.

D I M.

Si ſupponga, G, il centro, e SO, la diſtanza della linea evaneſcente, FD; li originali delli angoli BAC, BCA ſaranno uguali a COE, e EOF (*Probl.* 2.). Ma per la natura del cerchio, DOE, e FOE, ſono uguali a GIE, e HKE, li quali (*per conſtr.*) ſono uguali alli angoli rappreſentati per BAC, e BCA. Onde, S, è il cento, e SO, la diſtanza cercata.

PRO-

P R O B L. XXII.

Eſſendo data la projezione d'un trapezio di una ſpecie data, ritrovare la ſua linea evaneſcente, il centro, e la diſtanza.

Sia, *abcd*, (*fig.* 12.) la projezione data, ſi tirino le diagonali, *ac*, *bd*, che s'incontrano in, *e*; e per le projezioni delle originali di *ae*, *ac*, e, *be*, *ed*, ſi trovino li punti evaneſcenti E, F, delle linee *ac*, *bd*, (*Probl.* 19.). Si conduca, EF, che ſarà la linea evaneſcente cercata. Di più per la ſpecie data dell'originale del triangolo, *abc*. Si trovi il centro, S, e la diſtanza, SO, (*Probl.* 21.)

P R O B L. XXIII.

Eſſendo data la projezione d'un parallelo pipedo rettangolo ritrovare il centro, e la diſtanza del quadro, e la ſpecie della figura originale.

Sia, ABCDFFG, (*fig.* 24.) la projezione data, ſiano prolungate le projezioni delli lati paralleli finchè s'incontrino nelli loro punti evaneſcenti H, I, K, e ſi conducano HI, HK, IK, le quali ſaranno le linee evaneſcenti delle diverſe facce della figura cercata, che contengono un' angolo ſolido retto. Si conduca, K*d*, perpendicolare ad HI, e HM perpendicolare a KI, che l'incontra in S, ſarà, S, il centro del quadro (*cor.*

(*cor*.2. *Probl*.16.). Sul diametro, lK, ſi deſcriva un cerchio, e ſi conduca, SO, perpendicolare ad, lK, che lo taglia in, O, ſarà, OS, la diſtanza del quadro (*Probl*. 14.) eſſendo lOK un' angolo retto per la natura del cerchio. Finalmente ſi trovino le diſtanze delle linee evaneſcenti KI, IH (*cor*.3. *Probl*.16.) M, e l eſſendo i loro centri (*teor*.1.), e ſi trovi la ſpecie delle originali delle facce DAEF, DABC (*Probl* 20.)

Cor. Quando la linea evaneſcente di una delle facce, per eſempio IH, paſſa per il centro del quadro, il punto evaneſcente, K, delli lati, che li ſono perpendicolari è a una diſtanza infinita, onde ſarebbe indeterminata la ſituazione di lK; talmente che la ſpecie della faccia, ABCDE, può eſſere preſa ad arbitrio, e allora il centro, e la diſtanza del quadro ſi trovano per il problema 20. In queſto caſo ſe ſi richiedeſſe ſolamente, che la projezione propoſta rappreſentaſſe un parallelopipedo rettangolo in generale, il ſito del punto di veduta ſarebbe in qualunque punto della circonferenza d'un cerchio deſcritto ſul diametro HI, e in un piano perpendicolare al quadro. Imperocchè eſſendo indeterminato il punto, l, ſarà anche indeterminata la ſpecie della figura, talmente che il punto di veduta potrebbe eſſere in qualunque punto della circonferenza. Onde ſe il ſemicircolo ſia perpendicolare al quadro, l'occhio dello ſpettatore poſto in qualunque punto della ſemicirconferen-

za giudicherebbe la figura, AD, eſſere un parallelopipedo rettangolo, benchè la ſpecie della figura foſſe molto diverſa ſecondo la diverſa ſituazione dell'occhio. Laſcio alli artiſti a conſiderare ſe queſto corollario potrebbe eſſere di qualche uſo nel dipingere le ſcene delli Teatri. Imperocchè ſe ſupponiamo, l, K, eſſere li due punti, che ſogliono chiamarſi nelli volgari libri di perſpettiva: *punti di diſtanza*: e ſe li edifizj ſono talmente diſegnati, che li loro lati ſiano terminati a queſti punti, come ſi vede nella figura preſente, eſſi comparirebbero rettangoli alli occhi delli ſpettatori, eſſendo le loggie nella ſemicirconferenza del cerchio.

Fine della Perſpettiva.

APPENDICE.

NUM. I.

Metodo per rappresentare le figure sopra una superficie qualunque irregolare.

DA tutto quel che si è detto in quest' Opera per spiegare i principj della perspettiva, e specialmente in fine delle definizioni, è evidente, che il secondo teorema può intendersi di qualunque superficie o concava, o convessa, o in qualunque modo irregolare. Sia la superficie del quadro ABC (*fig.*3.) d'una forma qualunque, la projezione, *fg*, della linea originale, FG, sarà sempre l' interfezione del quadro col piano del triangolo FGO; ma la parallela OV, è in questo piano (*teor.*3.); onde se la fiammella d'una candela è talmente diretta, che essa mandi l'ombra di OV sopra un punto qualunque, B, della linea FG, l' istessa ombra coprirà tutta la linea FG, e nell' istesso tempo la linea V*fg*B sopra il quadro, la quale è la projezione di FG; tutti i raggi, che vengono dalla candela, e che passano per la linea, OV, facendo in questo caso un piano, che coincide col piano del triangolo OFG. Il medesimo accaderebbe, se alcuno collocasse talmente l'occhio, che un punto qualunque della linea FG, li sembrasse coperto dalla linea OV, in questo caso OV comparirebbe coprire tutta la projezione V*fg*. Nell'istessa maniera se una candela è talmente collocata, che l'ombra di OV passi per un punto qualunque della projezione V*g*, la stessa ombra coinciderà con tutta la projezione; e se alcuno si ponga talmente, che OV sembri coprire un punto qualunque della detta projezione, essa comparirà coperta tutta. Onde io credo che possa essere utilissimo il metodo seguente per disegnare le projezioni di ogni sorta di figure sopra una superficie qualunque, per esempio, sopra le muraglie, le cuppole delle Chiese, li solaj delli Palazzi, le scene delli teatri &c.

Si scelga qualche linea principale nel disegno da farsi, ed avendo con qualche metodo ritrovato le projezioni delli suoi punti estremi, si passi per lo punto di veduta un filo parallelo alla linea originale, si mandi l'ombra del medesimo filo sulli punti già trovati, quest'ombra segnata col lapis sarà la projezione di questa linea principale; ovvero se pare più a proposito in qualche caso particolare, si ponga l' occhio in tale sito, che il filo parallelo sembri coprire li due punti già segnati, e si adoperi qualche assistente per segnare la projezione cercata. Per esempio sia *pb*, (*fig.*20.) questa projezione principale: per ritrovare la projezione *o*, di qualche altro punto della figura da disegnarsi, sia immaginato questo punto essere la sommità d'un triangolo, del quale la base è l'originale della projezione ne già trovata, e sia collocato il filo, che deve passare per lo punto di veduta in una situazione parallela all'originale di uno dei lati di questo triangolo, e si mandi la sua ombra sopra l'estremità della projezione data, e si segni come prima: si avrà la projezione indefinita di questo lato *bo*. Si faccia l'istesso per un'altro lato, e coll'intersezione di queste projezioni, per esempio, *bo*, *po*, avremo la projezione del punto cercato. Questo metodo può servire per ritrovare la projezione di una figura qualunque, e può essere utilissimo alli pratici di perspettiva.

NUM. II.

Della mistura delli colori secondo li principj del Cavalier Isaac Nevvton.

NElli colori si devono considerare due cose, il colore propriamente detto, e la forza della luce, e dell'ombra. Imperocchè siccome li diversi colori, per esempio, il rosso, ed il verde possono avere la medesima forza di colore, così ancora due oggetti, dei quali uno è molto più oscuro dell'altro, possono avere l'istesso colore, per esempio, turchino vivo, e turchino oscuro.

Quanto al colore propriamente detto, si devono anche considerare due cose, 1. la spezie di colore, 2. la perfezione o l'imperfezione del colore nella medesima spezie. Li colori differiscono di spezie, come il turchino ed il rosso; e li colori dell'istessa spezie differiscono in grado di perfezione, come il rosso d'un prato di papaveri è molto più perfetto, che un rosso di mattoni. Questa qualità di perfezione e d'imperfezione nelli colori è espressa dalli Pittori colli termini di *puro*, o *semplice*, e *rotto*, le quali denominazioni sono prese dalla pratica solita nel fare li colori imperfetti colla loro mistura, la quale viene chiamata, *rompere* il colore. Quanto a questa qualità delli colori, il Signor Isaac Nevvton nella sua eccellente opera di ottica dimostra, che ogni raggio di luce ha il suo colore proprio, che egli porta sempre seco, e non perde mai, in qualunque maniera la luce venga riflessa, o rifratta. Questi colori naturali delli raggi sono i colori semplici, e il loro ordine naturale, come essi compariscono separati per la refrazione del prisma, è il seguente, rosso, arancio, giallo, verde, turchino, indico, pavonazzo. Tutti li colori imperfetti o rotti si fanno colla composizione, e mescolanza di questi semplici colori, per esempio, li raggi gialli mescolati colli turchini fanno il verde, ma non così perfetto, come sono li raggi naturali verdi. Similmente li raggi rossi, e gialli compongono un colore arancio, ma non così perfetto, come è l'arancio semplice. Con una giusta proporzione di tutti li raggi naturali assieme si produce la bianchezza, la quale è indifferente a qualunque colore semplice, e non può dirsi inclinare più a un colore, che ad un altro. Per bianco intendo un colore tra il bianco il più vivo, ed il nero il più oscuro; imperocchè non avendo considerato fin'adesso li gradi di luce, e d'ombra: tutti li colori, dal nero fino al bianco, devono considerarsi come dell'istesso colore. Da questa osservazione della natura del bianco, pare, che li colori rotti sono medii tra li colori semplici, ed il bianco, e che più il colore è rotto, più è vicino al bianco; e che più il colore è lontano dal bianco, più è semplice.

Avendo spiegato la natura delli colori, e l'effet-

cio inclinante verso il rosso, ed essendo *r*, più vicino al centro che alla circonferenza, il colore sarà più rotto. Si farà l'istesso per gli altri casi, sarebbe facile il determinare esattamente la distanza dal centro, ma in tali cose basta la costruzione.

Dal metodo precedente si capisce il modo di sciogliere il problema inverso, cioè, essendo dato il luogo d'un colore composto, ritrovare li colori da mescolare per produrre il colore composto dato. Sia dato il colore in 3, per il punto 3, si conduce una retta qualunque P3Q, il colore composto può essere prodotto dalla mescolanza delli colori in P, Q, prendendo la proporzione delli colori espressa per le linee 3P, 3Q, cioè prendendo del colore P in ragione di 3Q, e del colore Q in ragione di 3P. Dipoi conducendo O3, che passa per li punti 1, 2, 4, l'istesso colore può essere prodotto mescolando li colori in 2, e 4, in proporzione delle linee 4. 3. e 2. 3. overo l'istesso colore può essere prodotto rompendo il colore semplice in 1. col bianco in O, nella proporzione delle linee 3, 1. e 3. O. L'istesso s'intende per gli altri casi. Le proporzioni delli colori ora assegnate per la mescolanza delli medesimi, si riferiscono solamente alla quantità delli raggi di luce, e non alli materiali delli quali sono composti li colori artificiali. Onde se diversi colori artificiali siano mescolati secondo le regole già spiegate, e se alcuni di loro sono più oscuri, si dovrà

dovrà adoperare una proporzione maggiore di materiali più oscuri per produrre il colore proposto: imperocchè riflettono meno raggi di luce a proporzione della loro quantità, e si deve al contrario adoperare una minore proporzione di materiali più vivi, imperocchè riflettono una maggiore quantità di luce.

Se fosse perfettamente conosciuta la natura delli materiali adoperati nella pittura, talmente che si sapesse esattamente la spezie del colore, la sua perfezione, il grado di luce e d'ombra, che ha ogni materiale proporzionatamente alla sua quantità, si potrebbe colle regole precedenti produrre esattamente un colore qualunque proposto, mescolando li diversi materiali in una giusta proporzione. Ma benchè queste particolarità non possano essere sufficientemente conosciute per farne uso, oltre il tedio, e la difficoltà che si incontrarebbero nel misurare li colori secondo la loro esatta proporzione, nulladimeno questi principj possono essere di grandissimo vantaggio nella pittura. Si supponga, che un Pittore habbia sulla tavoletta diversi colori in *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, per esempio in *a*, del minio, in *b*, dell'orpimento, in *c*, colore di garofolo, in *d*, dell'acqua di mare, in *e*, dell'azurro, e che il Pittorre debba fare del verde rotto del quale il luogo fosse in *x*. Considerando intorno al punto *x*, si vede che il detto punto non è molto lontano dalla linea che passa per *c*, *d*. Onde si conchiude che mesco-

l'effetto della loro mescolanza, per ritrovare esattamente il colore prodotto dalla mistura d'un numero di colori qualunque dati, il Signore Isaac Nevvton dispone li colori nella maniera seguente. Sia il cerchio ADFA (*fig.*25.) la circonferenza del quale sia divisa in sette parti AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA, nella medesima proporzione che hanno fra di loro le frazioni $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{40}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{2}{9}$. Tra A e B si dispongano tutti i generi di rosso, da B in C tutti i generi d'arancio, da C in D tutti i generi di verde, da E in F tutti i generi di turchino, da F in G tutti i generi d'indico, e da G in A tutti i generi di pavonazzo. Avendo così disposti li colori semplici, O, sarà il luogo del bianco, e tra il centro e la circonferenza sono i luoghi degli altri colori rotti; li colori che sono più vicini al centro essendo li più composti, e quelli che ne sono più lontani essendo li meno composti. Nella linea O1, tutti li colori in 1, 2, 3, 4, sono dell'istessa specie, cioè il verde inclinante verso il turchino, ma il colore in 1, è il colore semplice naturale, il colore in 2, è un poco più composto o rotto, il colore in 3, più composto, il colore in 4, è ancora più rotto.

Essendo li colori disposti in questa maniera, per conoscere il colore che risulta dalla mistura di colori qualunque dati, si deve trovare il centro di gravità delli luoghi delli colori dati, ti, e si avrà il carattere del colore composto. Per esempio, se io voglio conoscere quale colore risulterebbe dalla mescolanza di due parti di giallo in P, con tre parti di turchino semplice in Q, si deve trovare il centro di gravità 3, delli punti P, Q, cioè si conduce PQ, e si divide in 5. parti, che è la somma di 3, 2., si prende il punto 3, cioè trè parti verso P. imperocchè vi sono trè parti di turchino. e si prendono due parti verso Q, poichè vi sono due parti di colore in P. Conducendo di poi la retta, O3, che taglia la circonferenza in 1., che è tra D è E, ma più vicino di E, si vede che la mescolanza produce il verde inclinante al turchino, ma perchè il punto 3., è quasi mezzo trà il centro, e la circonferenza, il colore è poco rotto. Questa dottrina diventerà più chiara con un'altro esempio. Se io voglio conoscere il colore composto dalla mescolanza di due parti di giallo in P, tre parti di turchino in Q, e cinque parti di rosso in R, si trova primieramente il luogo 3, della mistura di giallo e di turchino come di sopra. Condotta la retta 3R; essendo cinque parti di colore in 3, e cinque parti di colore in R, essa si divide in dieci parti, e si prende il punto *r*, cinque parti lontano da R, in questa maniera il punto *r*, è il centro di gravità delli trè colori in P, Q, R, e si ha conseguentemente il luogo della mescolanza, tirando O*r*, che taglia la circonferenza in S. Onde il colore sarà arancio

nella mescolanza un'effetto molto diverso da quello che si aspettava, talmente che sia possibile che alcuni materiali oscuri dilavati col bianco, producano colori più chiari, e meno composti di quel che sarebbero essendo semplici. Ma tutte queste riflessioni meritano di essere considerate dalli pratici dell'arte.

Benchè tutta la teoria precedente dipenda dalle sperienze di Nevvtono sopra li colori, nulladimeno non mi tratterrò a riferirle essendo descritte in tutti i libri di buona fisica, basterà di spiegare i limiti delli colori nell'imagine Solare. Il Nevvton avendo adoperato un prisma del quale l'angolo verticale era a un dipresso di gradi 63. mandava l'imagine del Sole alla distanza di 22.piedi, ed osservava la lunghezza dell'imagine di dita 13. $\frac{1}{4}$, e la lunghezza di 2: $\frac{5}{8}$. Onde li centri delli cerchj esteriori che terminavano la lunghezza dell'imagine erano distanti tra di loro di 20. $\frac{5}{8}$ dita. Sia questa imagine APCDVB (*fg.*26.) nella quale la distanza delli centri sia XY. Si divida XY in due parti uguali nel punto H, e in tre parti nelli punti G, I. Di più si divida XI in tre parti in E, e si prenda KY, la quinta parte, e MY l'ottava di tutta XY. Saranno li spazj $MY = \frac{1}{8}$, $KM = \frac{3}{40}$, $IK = \frac{2}{15}$, $HI = \frac{1}{6}$, $GH = \frac{1}{6}$, $EG = \frac{1}{9}$, $XE = \frac{2}{9}$.

L'ima-

L'imagine divisa in questa maniera essendo presentata al Sole nello sperimento del Nevvton, li colori separati occupavano li predetti spazj coll' ordine seguente, cioè, il rosso in MY, l'arancio in KM, e poi giallo, verde, turchino, indico, pavonazzo nelli spazj seguenti. Onde si vede la ragione della mentovata divisione del cerchio in $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{40}$ &c.

Nella predetta costruzione per la composizione delli colori, si deve prendere, secondo il metodo del Nevvton, il centro di gravità delle parti delli diversi colori dati, la ragione si è, che si possono considerare le azioni delli colori sull' organo della vista come forze, le quali sono in ragione delle masse, essendo uguali le velocità.

Prima di finire questo articolo rimane a spiegare una certa analogìa accennata dal Nevvton tra li colori, e li tuoni della musica. Si prolunghi XY in Z, e si faccia $YZ = YX = 1$. Poichè $MY = 1.$, sarà $MZ = \frac{1}{8} + 1. = \frac{9}{8}$, Di più $KM = \frac{1}{5}$, onde sarà $KZ = \frac{1}{5} + 1. = \frac{6}{5}$ e continuando nell'istessa maniera, si troveranno per ordine le altre distanze $IZ = \frac{4}{3}$ $HZ = \frac{3}{2}$ $GZ = \frac{5}{3}$, $FZ = \frac{16}{9}$, $XZ = 2$. Se si considera la linea XY, come una corda musicale alla quale

mescolando li colori c, d, si otterrà a un dipresso il colore cercato. Ma perchè x, e più vicino del centro O, che la linea cd, avendo portato la tinta il più vicino che sia possibile della tinta cercata, per esempio in z. Si riguarda qualche colore opposto a z, traversando x, z, col quale si possa rompere la tinta, e si trova essere a, il più vicino. Onde mischiando del colore a, si ha la composizione cercata. Se il colore a portasse la tinta troppo oltre verso la linea OD, si mette un poco più del colore d, per avere il giusto luogo. Ovvero avendo la tinta z, si potrebbe rompere col bianco del quale il luogo è il centro O; ovvero ancora mettendo una proporzione maggiore del colore d, in vece di a, si potrebbe dopo rompere la tinta col colore b: Nell'istessa maniera colla sola considerazione di questo esempio, si potrà fare una tinta qualunque colli colori dati. Si vede che il rosso ed il giallo producono un'arancio rotto, il quale diventerà ancora più rotto aggiungendo il turchino, o l'indico, o il pavonazzo, che devono prendersi l'uno, o l'altro, quando si vuole avere una tinta che inclina più al giallo o al rosso, il turchino portandolo verso il giallo e rompendolo molto, il pavonazzo portandolo verso il rosso, e rompendolo meno.

Da questi principj si capisce perchè li materiali delli colori più vivi, e più semplici sono di maggior prezzo. Li colori più semplici sono più

più ſtimabili, perchè non poſſono eſſere prodotti dalla miſtura, poichè la miſtura rompe ſempre li colori. Supponiamo *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, i colori dati, allora condotte delle linee per unire li punti, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, tutte le tinte che poſſono eſſere prodotte da queſti colori avranno il loro luogo nell'area del poligono *abcde*. Che li colori più vivi ſiano più ſtimabili delli oſcuri la raggione sì è, perchè il nero non rompe li colori come fa il bianco, talmènte che ſia più facile di fare una tinta chiara oſcura, con colori vivi e neri, che di fare una luce viva con colori oſcuri, e col bianco. Imperocchè è ſtato dimoſtrato che il bianco rompe molto li colori, ma il nero non eſſendo che una privazione di luce, ſolamente li oſcura, abbenchè per cauſa dell' imperfezione delli materiali che ſono in uſo, il nero può ancora rompere un poco li colori, non eſſendovi materiale alcuno perfettamente nero, come ſi può vedere nelli più belli neri, che hanno ſempre una meſcolanza di luce, e d'ombra. Vi ſarebbero molte eccezzioni da farſi nell'applicazione di queſti principii alla pratica, per cagione delle qualità particolari delli materiali che formano li colori. Se tutti i colori foſſero come polveri ſecche le quali non produceſſero effetto alcuno l'una ſopra l'altra colla loro meſcolanza, e fermentazione. queſte oſſervazioni ſarebbero eſattiſſime nel meſcolarli. Ma alcuni colori ſono di tale natura, che eſſi producono nella

le ſi debbano riferire le diviſioni MZ, KZ &c., dividendo li numeri $1. \frac{9}{8}, \frac{6}{5}$ &c. per 2. Si avranno le frazioni $\frac{1}{2}\ \frac{9}{16}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}\ \frac{8}{9}\ 1.$ Le quali riferite alla corda XZ, come tuono principale eſprimeranno nel primo rango un *tuono maggiore*; di poi per ordine li tuoni ſeguenti, una *terza minore*, una *quarta*, una *quinta*, una *ſeſta maggiore*, una *ſettima*, un'*ottava*. Per evitare le frazioni ſi potrebbe conſiderare XZ, come un *monocordo*, del quale la lunghezza foſse 360. e le diviſioni armoniche foſsero 320. 300. 270. 240. 216. 202. $\frac{1}{2}$, 180. li quali numeri hanno tra di loro la medeſima proporzione, che le frazioni precedenti. Queſte diviſioni eſprimono li gradi dell' ottava: *ſol*, *la*, *fa*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *ſol*, ſeguitando, come ha fatto Nevvtono, la ſcala di Guido Aretino; ovvero li gradi *re*, *mi*, *fa*, *ſol*, *la*, *ſi*, *ut*, *re*, riducendo la ſcala antica alla moderna; nella quale ſerie di tuoni, li colori arancio, e indico corriſpondono a due mezzi tuoni, cioè, l'arancio all'intervallo del *mi*, al *fa*, e l'indico all'intervallo del *ſi*, a *ut*. Da queſta breve ſpiegazione ſi vede, che li ſpazj delli colori non corriſpondono alle note muſicali, ma ſolamente li intervalli dell' imagine Solare riferiti alla lunghezza del monocordo. Onde ſi vede che l'analogia tra li ſuoni, e li colori non è affatto eſatta, ta. Si potrebbero aggiungere molte altre ragioni intorno all'imperfezione della medeſima analogia; ma queſto argomento non appartiene al noſtro propoſito, ſi può leggere quel, che ne ha ſcritto il Signor De Mairan celebre fiſico e matematico nelle memorie dell' Academia di Parigi negli anni 1727, e 1738. Credo che il Nevvton abbia cercato con premura qualche corriſpondenza maggiore tra li ſuoni, e li colori; e da queſta cagione mi perſuado eſſere derivata la diviſione, che egli fa del cerchio in ſette parti proporzionali alli numeri $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{9}$, li quali numeri corriſpondono nell'antica ſcala alli ſette tuoni muſicali, *ſol*, *la*, *fa*, *ſol*, *la*, *mi*, *fa*, *ſol*.

Queſta diviſione adoperata dal Nevvton per la compoſizione delli colori *lib.* 1. *dell' ottica part.*2. *prop.*6. è diverſa da quella, che ſi è meſsa quì sù alla pag.69. Quella il Nevvton non la mette in niun luogo eſpreſſamente per la diviſione del circolo, e compoſizione de' colori; ma da molti luoghi tanto dell' ottica, quanto delle lezioni ottiche eſſa ſi raccoglie facilmente per l'imagine ſolare, ove ſi vogliano eſprimere gli ſpazj, che ivi pigliano i diverſi colori. Se ſi rifletta a varj paſſi di queſte ſue opere, e ſi badi alla analogia de' colori compoſti colle force compoſte accennata quì sù alla pag.76, ſi può inferire, che inerendo alla diviſione della imagine ſolare da lui abbrac-

abbracciata, anche quì per li colori compoſti convenga il dividere il circolo nella ſuddetta maniera della pag.69. Se il Nevvton non l' ha quì abbracciata, e ne ha ſoſtituita un'altra, mi perſuado, che non l'abbia fatto ſenza qualche apparenza di ragione, che credo ſia ſtata una maggiore analogia tra li colori, e il ſuono; tanto più, che nell'una, e nell'altra maniera i colori compoſti vengono aſsai poco diverſi, e che nelle lezioni ottiche ſi moſtra alquanto irreſoluto ſulla preciſa diviſione della ſteſsa ſolare imagine, mentre dice: *Cæterum hæc non adeo præciſe obſervare potui, quin & fateri cogar, ea poſſe paulo aliter fortaſſe conſtitui*; anzi proponendo due diverſe diviſioni ſoggiunge; *ſuperiorem vero diſtributionem potius adhibui, non tantum, quod cum phœnomenis optime convenit, ſed quod fortaſſe aliquid circa colorum harmonias, qualium pictores non penitus ignari ſunt, ſed ipſe nondum ſatis perſpectas habeo, ſonorum concordantiis fortaſſe analogas involvat*.

Su queſta materia ſi può vedere la belliſſima diſsertazione *De Lumine* del dottiſſimo P. Boſcovich, e mio amiciſſimo, il quale nella ſeconda parte di eſsa ha varie nuove, e profonde ricerche, anche ſu queſto iſteſso argomento della diviſione del cerchio per la compoſizione de' colori, e vi ha introdotta queſta mutazione medeſima.

Io già ho ſpiegato la compoſizione delli colori; per altro chi vorrà ridurre in pratica la la costruzione precedente con maggiore esattezza, dovrà conoscere la degradazione delli colori, e il loro sito nell'imagine Solare. Benchè nelle sperienze del Prisma non si contino volgarmente che sette colori, perchè presi assieme sono inseparabili, nulladimeno le osservazioni fatte con arte ne dimostrano molti più. Facendo passare con lentezza un'imagine Solare ben pura sopra un filo bianco, io ho osservato nelli diversi intervalli più di quindici gradi di colori d'una differenza sensibilissima alli miei occhj. Molti altri hanno provato l'istesso. Onde è evidente, che per comporre più perfettamente un colore dato, devono essere conosciuti con esatta sperienza i luoghi delli gradi diversi negli intervalli delli colori primarj.

NUM.

NUM. III.

Esame d'un principio di Perspettiva.

E' Principio universale di Perspettiva, che gli oggetti veduti sotto angoli uguali compariscono uguali. Da questo assioma dipende il secondo teorema della Perspettiva, nel quale si è dimostrato, che le projezioni scenografiche rappresentano gli oggetti reali. Ed in fatti, essendo uguale l'angolo ottico, cioè l'imagine formata nell'occhio dalli raggi estremi dell'oggetto, per lo più gli oggetti appariscono uguali benchè disugualissimi. Se passeggiando in un viale di alberi consideriamo la parte del Cielo compresa tra i medesimi, essa ci comparirà uguale all'intervallo dello stesso viale, essendo uguale l'angolo apparente. Ma questo principio patisce qualche eccezione; o per dir meglio, ha bisogno di qualche spiegazione.

La grandezza apparente degli oggetti dipende da molte circostanze. E' certo che acquistiamo coll'uso un'idea più esatta delle grandezze reali; per esempio, considerando una fila di Soldati, il più vicino dovrebbe comparire più grande dell'ultimo; ma perchè sappiamo che l'ultimo è un Soldato come è il primo, abbiamo imparato colla sperienza a correggere questo giudizio delli nostri occhj, e ci rappresentiamo l'ultimo Soldato come della medesima altezza del primo. Questo

giudi-

giudizio non vale nelle distanze troppo grandi, o nelle direzioni che non sono familiari. Imperocchè in queste sorte di distanze e di direzioni non abbiamo la sperienza, e conseguentemente non potiamo coll'ajuto della medesima riformare l'apparenza degli oggetti. Il pensiere di paragonare le grandezze apparenti e reali essendo derivato dal misurare le grandezze reali o col camminare, o colle mani, queste sperienze non possono avere luogo nelle distanze verticali, le nostre misure per lo più essendo fatte in direzioni orizontali. Per lo contrario sappiamo riformare le grandezze apparenti, quando gli oggetti possono essere soggetti a frequenti sperienze o osservazioni. Per esempio, li mattoni quadrati d'un pavimento ci comparischono quadrati, benchè secondo le leggi medesime della perspettiva sieno rappresentati all'occhio con figure molto diverse; abbiamo coll'uso e colla sperienza conosciuto la figura reale di questi mattoni, e rettifichiamo la grandezza apparente di essi.

Il celebre Signor Perrault nell'architettura del Vitruvio combatte l'opinione ricevuta dagli Architetti e Scultori, cioè, che le Statue alzate nella cima delle fabbriche debbano essere più grosse, e scolpite con maggiore franchezza e libertà che le Statue vicine. Il lodato Autore si appoggia su questa ragione, che l'occhio essendo avvezzo alle distanze, il nostro giudizio è così perfetto che un' oggetto pare dell'istessa grandezza, o sia posto in una maggiore o minore distanza. E chiaro dalle

dalle riflessioni precedenti, che il Perrault non fa un'applicazione giusta delli sudetti principj, poichè le Statue poste sopra alti edifizj non sono una cosa così familiare e commune, che ogn'uno possa subito emendare il giudizio degli occhj. Vediamo per sperienza, che pochissimi spettatori giudicano dell'altezza delle Statue poste nella facciata della Chiesa di S. Pietro, se non le hanno prima considerate da vicino. Nè pare meglio fondato l'istesso Autore nel criticare la celebre Storia della Statua di Minerva lavorata dal Phidia, la quale era mostruosa vista da vicino, ma era d'una bellezza sorprendente considerata in una giusta distanza. Si osserva il medesimo ogni giorno in molte pitture, le quali da vicino pajono toccate grossamente, ma si vedono in una convenevole distanza perfettamente finite.

Che la sperienza che noi abbiamo delle distanze contribuisca molto alla grandezza apparente degli oggetti è evidente da molte osservazioni. Ha osservato ogn'uno, che in una vasta campagna le case che si credevano vicine, erano molto distanti. Imperocchè essendo avvezzi a giudicare della distanza per la serie degli oggetti frapposti, crediamo vicine le case benchè lontane, quando vi sono pochi oggetti interposti, come accade in una nuda campagna. Da questa stessa ragione viene in parte, che il Sole nell'Orizonte comparisce più distante che nel meridiano, essendo nel primo caso un maggiore numero di oggetti terrestri medii. Onde giudichiamo ancora il Sole molto

molto maggiore nell'Orizonte che nel meridiano.
E' una ſperienza coſtante delli viandanti, che di notte tempo, o ſul fare del giorno gli oggetti vicini, come gli alberi e le caſe, ſi credono molto maggiori e più diſtanti. La cagione di queſto inganno può eſſere, che non diſtinguendo per l'oſcurità del Cielo la Terra frapoſta, queſti oggetti ſi riferiſcono alla parte più luminoſa dell'Orizonte. Onde accreſcendo la diſtanza, ſi accreſce ancora la grandezza.

Giudichiamo anche delle grandezze per paragone. Se conſideriamo gli oggetti in una valle formata da alte montagne, queſti oggetti compariranno ſtraordinariamente piccoli. Queſto errore proviene dalla cagione già accennata, poichè la grandezza apparente delli oggetti grandi e lontani, è la medeſima che la grandezza apparente degli oggetti piccoli e vicini.

Il giudizio che ſi fa delle diſtanze, e conſeguentemente delle grandezze può eſſere ſoggetto a molti inganni per cagione della maggiore o minore luce. Se nella notte alcuni oggetti ſono più illuminati, li crediamo più vicini, e forſe da queſta origine coll'ajuto della fantaſia potrebbe naſcere la rappreſentazione di alcuni fantaſmi, i quali ſvaniſcono da vicino.

Qualunqne ſia la cagione di queſti giudizj diverſi, pare certo che l'angolo apparente non è ſempre la miſura della grandezza apparente. Ma gli errori che derivano da varie circoſtanze non alterano la verità del principio di perſpettiva. Reſta ſempre evidente, che l'imagine dell'oggetto dipinta nel fondo dell'occhio è proporzionale all'angolo ſotto il quale ſi vede l'oggetto. Di più ſi potrebbe ricevere queſto principio con qualche limitazione, cioè nei caſi, nelli quali la diſtanza apparente è la medeſima, e tutte le circoſtanze rimangono uguali. Finalmente l'arte della perſpettiva non conſiſte ſolamente nella projezione ſcenografica degli oggetti, ma ancora ſono neceſſarie tutte quelle degradazioni di ombre e di colori, che formano la perſpettiva chiamata *aerea*. Da queſta giuſta diſtribuzione di tinte ſono prodotte nel dipignere li paeſi quelle lontananze che fanno il merito principale di queſto genere di pittura.

E' evidente, che il principio già eſaminato è unito con quello delle diſtanze. Si ſtabiliſce communemente, che le grandezze apparenti ſono in ragione reciproca delle diſtanze, la quale coſa non ſi deve intendere generalmente. Imperocchè è dimoſtrato, che nelle piccole diſtanze le grandezze apparenti decreſcono meno che nella proporzione delle diſtanze medeſime. Ma ſe gli angoli ottici ſono molto piccoli, ſi può conſiderare in queſto caſo la grandezza apparente in ragione reciproca delle diſtanze, come è chiaro dagli elementi di geometria. In oltre queſt'iſteſſo principio patiſce la medeſima difficoltà del primo. E' ſtato già oſſervato, che l'eſtimazione delle diſtanze dipende dalla ſerie degli oggetti frapoſti. Il noſtro occhio non potendo abbracciare aſſieme che

che un piccolo numero di oggetti, non può diſtinguere in una diſtanza troppo grande tutti li oggetti interpoſti, e perciò è ſoggetto a errore nello ſtimare le grandi diſtanze. Di più li oggetti lontani dipingono nell'occhio un'imagine ben piccola, e fanno un'impreſſione troppo debole ſull'organo della viſta, onde le diſtanze apparenti ſono riſtrette in anguſti limiti. Da queſta cagione deriva, che due oggetti molto diſtanti ſono giudicati eſſere alla medeſima diſtanza apparente, benchè la diſuguaglianza ſia immenſa, come accade nel Sole e nella Luna, eſſendo il Sole diſtante da noi di 11000 diametri della Terra, e la Luna ſolamente di 60. Dalla medeſima ragione dipende in parte la concavità apparente del Cielo, eſſendo li corpi celeſti in grandiſſime diſtanze, la differenza delle quali è affatto inſenſibile ai noſtri occhj.

Dopo avere eſaminato il principio univerſale di perſpettiva, ora non ſarà fuori di propoſito il conſiderare brevemente alcune conſeguenze del medeſimo. Le linee parallele, come ABC, DEF (*fig.* 27.) riguardate obliquamente pajono convergenti. Imperocchè decreſce ſempre più la grandezza apparente degli intervalli perpendicolari AD, BM, CF &c., e conſeguentemente le linee parallele ſembrano convergere verſo la linea imaginaria, condotta dall'occhio parallela alle medeſime. Onde l'occhio eſſendo ſuppoſto in O, e alzato ſul piano orizontale ABC, il detto piano deve comparire alzarſi per gradi verſo OG; e al contra-

contrario ſe l'occhio ſta ſotto il piano DF, il medeſimo piano comparirà abbaſſarſi. Benchè la ſuperficie del mare ſia conveſſa, nulladimeno la porzione di mare ſenſibile alli noſtri occhj comparirebbe piana, ſe la detta ragione ottica non accreſceſse la ſua conveſſità apparente. Per queſta medeſima cagione la ſommità degli alti edifizj compariſce inclinata verſo l'orizonte; poichè fingendo tirata per l'occhio una perpendicolare all'orizonte, e parallella all'altezza dell'edifizio, le parti le più alte dell'edifizio convergeranno in apparenza verſo queſta perpendicolare imaginaria. Onde è ignoranza di alcuni che attribuiſcono a un'errore dell'artefice quel ehe è effetto dell'arte.

Se ſi voleſse trovare la curva, nella quale biſognaſse diſporre una lunga ſerie di oggetti, talmente che l'occhio alzato ſopra il piano orizontale, li vedeſse tutti ugualmente diſtanti, cioè ſotto un medeſimo angolo apparente, il problema ſarebbe faciliſſimo. Imperocchè ſia AD la retta nella quale ſiano coſtituiti li due primi oggetti A, D. Sia l'occhio in O, del quale l'altezza perpendicolare ſia OQ. Sia QG la linea di mezzo, alla quale dal punto O ſi conducano le rette OD, OM. E' evidente per le condizioni del problema, che gli angoli AXD, AYM eſſendo uguali, li triangoli rettangoli XOD, OYM ſaranno ſimili. Onde facendo YM $= y$, XY $= x$, OQ $= f$, OX $= a$. QX $=$ O, XD $= b$, ſarà YM (y) : OY $\sqrt{ff + gg + 2gx + xx} =$ XD (b) : OX (a) : e ſi avrà

avrà l'equazione $aayy = bb \times \overline{yy + gg + 2gx + xx}$, che è un' equazione all' iperbola. Perciò disponendo una serie di alberi, o di colonne, secondo il perimetro di due iperbole, questi oggetti sarebbero rappresentati all'occhio come posti in due rette parallele. Il problema sarebbe poco più difficile in un'altra ipotesi qualunque delle grandezze apparenti. Onde non mi trattengo a discorrerne più diffusamente. Si può vedere quel che ne ha scritto il Signore Varignon nelle memorie dell'Academia di Parigi del 1717. E' della medesima natura il problema sciolto dal Sig. Pitot nelle memorie citate dell'anno 1734., nel quale problema, essendo dati quattro punti, cerca un quinto punto, dal quale alli quattro punti dati conducendo delle linee, li tre angoli così formati siano uguali, o in qualunque ragione data. Non devo omettere la riflessione fatta dal Signor Varignon nel luogo già detto, ove quel celebre Geometra esaminando il principio delle grandezze apparenti in ragione composta degli angoli apparenti, e delle distanze ne ricava quell'inconveniente, che disponendo una serie di oggetti in una retta, si debba disporre l'altra serie opposta in una curva convergente verso la retta, per avere il parallelismo apparente dell'una e dell'altra serie; cosa affatto incompatibile col parallelismo cercato, e che dimostrerebbe l'impossibilità dell'ipotesi.

Per rispondere a questa difficoltà basta riflettere, che le apparenze dipendenti dalla sperienza,

e che sono effetti della nostra imaginazione, non si possono esaminare col calcolo. Benchè due muraglie parallele, per esempio, compariscano convergere realmente, le giudichiamo parallele per ragione d'una sperienza antecedente, e correggiamo l'errore degli nostri occhi; ma se le muraglie convergono, compariranno veramente convergenti; imperocchè non abbiamo ragione ottica di parallelismo, gli angoli apparenti non essendo uguali, nè ragione di sperienza, poichè la sperienza dimostra il contrario. Onde in tali cose che dipendono dal giudizio della nostra mente, e da molte circostanze variabili di sopra accennate, non pare che possano avere luogo le sublimi ricerche analitiche.

NUM. IV.

Delle projezioni deformi, chiamate Anamorfosi.

NElla perspettiva volgare il piano di projezione si suppone tra l'occhio e l'oggetto; ma nel genere di projezione che ora mi propongo di considerare, l'oggetto è supposto tra l'occhio ed il piano di projezione. Le costruzioni dimostrate nella perspettiva precedente, non essendo limitate ad alcuna posizione determinata de' piani, potranno ancora adoperarsi in questo caso particolare, come sarà evidente dalle proposizioni seguenti.

PROBL. I.

Essendo diviso il parallelogrammo rettangolo ABCD in un numero qualunque di piccoli parallelogrammi, e posta la base AB del parallelogrammo sopra la linea AB d'un piano, al quale il detto parallelogrammo sia perpendicolare, ritrovare la proiezione del parallelogrammo, e delle sue divisioni sul piano dato, essendo dato il punto di veduta.

Dal punto di veduta O (*fig.*28.) si conduca la perpendicolare RO, che sarà la distanza del quadro. Per i punti di divisione della base siano condotte le rette RA*d*, RB*c* &c. Si faccia AD uguale all'altezza del parallelogrammo, e si prenda RI uguale alla distanza del quadro, e siano ambedue le linee perpendicolari ad RA. Dal punto I per le estremità, e divisioni di AD si tirino ID*d*, IF*f* &c. che tagliano RA prolungata, nelli punti *d*, *f*, *m* &c. per i quali si conducano le linee *dc*, *fe*, *ml* &c. parallele ad AB. Il trapezio AB*cd* così diviso in piccoli parallelogrammi sarà la projezione cercata.

DIM.

Si concepisca, come nel probl. 1. della perspettiva, il piano del triangolo RI*d* rivolgersi intorno alla linea RA*d*, finchè diventi perpendicolare al piano del quadro. Allora il punto I coincide con O, e li punti A, *m*, *f*, *d* &c. saranno le projezioni delli punti A, M, F, D &c. Per la medesima ragione, le linee condotte dal punto R alle divisioni della base saranno le projezioni delle linee perpendicolari ad AB, e le linee *dc*, *fe* &c. saranno le projezioni delle linee DC, FE &c. (*cor.* 1. *teor.* 4.)

L'istesso problema si può facilmente costruire in un'altra maniera colla projezione delle linee DC, FE &c. parallele al quadro (*cor.* 3. *del teor. citato*.)

Cor. 1. Se il parallelogrammo ADCB si riducesse al quadrato AFEB, è evidente, che essendo FB la diagonale di tutti i piccoli quadrati, sarebbe ancora B*f* la diagonale di tutte le loro projezioni. Simil-

Similmente *ld* sarebbe la diagonale di tutte le projezioni del quadrato IMDC.

Cor. Da questo problema si ricava il metodo delle *Anamorfosi* che consiste nel disegnare una pittura, la quale comparisce difforme veduta direttamente, ma acquista una giusta proporzione, quando è riguardata da un certo punto. Si descrive un parallelogrammo, o un quadrato intorno a una pittura originale, e si divide in molti piccoli quadrati. Di poi avendo diviso un'altro quadrato ABEF d'un lato qualunque, nel medesimo numero di piccoli quadrati, si trova la sua projezione AB*ef*, e si trasferiscono li lineamenti, e li colori di ciaschedun quadrato della pittura originale nelli trapezj corrispondenti della projezione AB*ef*. E evidente che la pittura difformata comparirà riformata all'occhio in O; poichè l'imagine di tutta la pittura, e di tutte le sue parti nell'occhio, e l'istessa, come se i raggi fossero venuti all'occhio originalmente dalla pittura regolare disegnata in miniatura nel quadrato ABEF, posto perpendicolarmente sopra la base AB. Per maggiore inganno delli spettatori si sogliono ornare con arte queste sorte di projezioni di varj disegni, i quali anche veduti direttamente facciano illusione agli occhi. Cresce l'inganno ottico, se queste trasformazioni sono riguardate con un piccolo tubo o a traverso un buco, per sottrarre agli occhi gli oggetti frapposti, e nascondere la distanza.

PROBL.

PROBL. II.

Disegnare in un piano una copia difforme d'un originale, la quale riflessa dalla superficie d'un cilindro comparisca regolare all'occhio in O.

Dal punto O, si abbassi la perpendicolare OR, (*fig*.29.) e si conducano le due linee R*a*, R*e*, le quali possono essere tangenti, o secanti del circolo *lnp* base del cilindro, secondo la maggiore, o minore deformità, che si vuole dare alla figura. Sopra la base *ae*, alzando un parallelogrammo o un quadrato si trovi la sua projezione, *aekf*, come nel problema precedente; tolto il cilindro, la figura veduta dal punto O, comparirebbe regolare. Ma nel caso di questo problema, li raggi essendo intercetti dalla superficie del cilindro, e conseguentemente riflesi dalla medesima, si devono cercare questi raggi riflessi, facendo, secondo le leggi di ottica, l'angolo di riflessione uguale all'angolo d'incidenza. Perciò considerando li raggi R*lf*, R*mg* &c. come partendo dal foco R, e riflessi dalla base, *lmnp*, si tirino li raggi riflessi, *l* F, *m* G &c. talmente che prolungando il raggio riflesso ed il raggio incidente, essi taglino segmenti uguali del cerchio. Finalmente si trasferiscono le linee *l*A*f*, *mbg* &c. con tutte le loro parti sopra le linee rispettive *l*AF, *m*BG &c. per i punti ABCDE, FGHIK, e per gli altri punti intermedii si facciano passare gli archi di curva, come ABCDE, la figura ACEKHF, così divisa comparirà

rirà regolare nella ſuperficie del cilindro veduta dal punto O. E' evidente che la coſtruzione ſarebbe la medeſima, ſe l'arco, *lmnop*, foſſe concavo, cioè, ſe la ſuperficie riflettente del cilindro foſſe concava.

D I M.

Poichè le linee, *af*, *bg* &c. con tutte le altre diviſioni del trapezio, *aefk*, ſono le projezioni del parallelogrammo poſto in, *ae*, e le linee AF, BG &c. ſono per coſtruzione, le medeſime projezioni rifleſſe dal cilindro, è evidente che il piano della figura AFHKE, rappreſenta il parallelogrammo trasformato, e rifleſſo dalla ſuperficie del cilindro nel piano EGHK. Onde ſiccome il trapezio *afke*, veduto dal punto O, produce un'imagine regolare, così ancora la projezione irregolare AFHKE rifleſſa all'occhio in O, deve fare l'iſteſſa impreſſione, come ſe i raggi partiſſero direttamente dalle linee del trapezio, o dalle linee del parallelogrammo, cioè l'imagine deve comparire regolare, e colle ſue giuſte proporzioni. La dimoſtrazione ſarebbe l'iſteſſa nel caſo della concavità.

Cor. 1 Poichè la baſe d'un cono è un circolo, li raggi rifleſſi dalla ſuperficie conica ſi determineranno come nella ſuperficie cilindrica. Onde ſi vede il modo di fare una traſformazione, la quale appariſca regolare veduta in una ſuperficie conica, o conveſſa, o concava.

Cor.

Cor. 2. Le ombre delle figure eſſendo le projezioni ſcenografiche delle medeſime, (*Def.* 5. *della perſpettiva*) ſi potrà con un metodo puramente meccanico e facile trasformare una figura qualunque in una ſuperficie conveſſa, o concava, o in qualunque modo irregolare. Si alzi perpendicolarmente ſopra un piano l'oggetto da trasformare, dietro al quale ſi ponga una candela acceſa, talmente che l'ombra dell'oggetto cada ſulla ſuperficie data. L'ombra e conſeguentemente la projezione tanto ſarà più grande e difforme, quanto più vicina ſarà la candela e meno alta ſul piano di projezione. Dipoi ſi ſegnino nell'ombra li lineamenti e li colori. ſi avrà la trasformazione dell'oggetto, il quale comparirà riformato, ponendo l'occhio nel luogo della candela. Se ſi piccano con un'ago li principali lineamenti dell'immagine, in vece dell'ombra ſi avranno varj punti luminoſi li quali ſegnati colli colori loro proprii rappreſenteranno l'immagine riformata all'occhio poſto nel ſito della candela. Si deve oſſervare che i raggi ſolari non ſono a propoſito in queſto caſo, poichè eſſendo paralleli non convengono nel punto ove ſi ſuppone l'occhio.

Cor. 3. Queſti problemi ſi poſſono anche coſtruire per mezzo delle curve, che ſono chiamate dalli Geometri *cauſtiche per rifleſſione*. Sia il circolo ABCD (*fig.* 30.), la baſe d'un cilindro o una ſezione del medeſimo parallela alla baſe, e che paſſa per l'occhio O. Sia nel piano di queſta baſe la linea *prt*, dell'imagine trasformata (*per il probl.*

probl.3.) la curva, *oabgd*, sia la caustica per riflessione delli raggi che partono dal punto O, overo dall'occhio, e per li punti *a*, *b*, *g*, *d* &c. si tirino le rette P*a*. R*b* &c. che siano tangenti della curva e secanti del cerchio riflettente in A, B, C, D, &c.. Siano condotte le rette OA, OB, OC &c., e si faccia AP = A*p*, B*r* = BR &c.. La linea PRT, riflessa dalla superficie del cilindro comparirà come se fosse veduta direttamente coll'occhio in O, tolto il cilindro. L'istesso s'intende di qualunque altra linea dell'imagine trasformata, la quale conseguentemente apparirà tutta regolare veduta dal punto O. E' chiaro dalla costruzione, che senza descrivere la caustica basterebbe condurre il raggio OB e la sua riflessione BR, che taglia PX, in qualche punto R, e fare B*r*=BR &c. il problema inverso si costruirebbe coll'istessa maniera, cioè, data la riflessione in X, T, R, si troverebbe l'immagine diretta, *p*, *r*, *t* &c.

*Scol.*1. Poichè nel corollario precedente ho fatto menzione dalle caustiche per riflessione, non sarà fuori di proposito il considerare brevemente la natura di queste curve. Se infiniti raggi incidenti come AB, AB &c. (*fig.*31.) che stanno tutti nel medesimo piano d'incidenza, non tendono al medesimo punto dopo la loro ultima riflessione, ma si intersecano in un numero infinito di punti, la curva della quale sono tangenti tutti questi raggi si dice: *caustica per riflessione*, e verrebbe chiamata: *caustica per rifrazione*, se li raggi fossero rifratti; ma questa ultima spezie di curva benchè sogget-

soggetta alla medesima teorìa, non appartiene al presente trattato. Se due tangenti BF, BF si intersecano nel punto G avvicinandosi l'una all'altra, finchè coincidano, si accosteranno ancora li punti di contatto e d'interseziome, e finalmente coincideranno. Onde è evidente che li raggi riflessi sono tangenti della caustica in quel punto del raggio, ove la sua intersezione col raggio prossimo svanisce. Perciò se si concepiscono due raggi incidenti infinitamente vicini moversi intorno al punto A, nel piano d'incidenza, il punto F intersezione delli raggi riflessi sarà alla caustica, la quale è chiamata o reale, o imaginaria secondo che li raggi riflessi sono convergenti o divergenti. Per dare una notizia esatta delle caustiche per riflessione, si deve primieramente considerare la riflessione delli raggi in una superficie piana. Questi raggi riflessi prolungati concorrono in un punto, il quale si trova conducendo dal punto luminoso una perpendicolare alla superficie piana, e prolungando la detta perpendicolare finchè la parte prolungata sia uguale alla perpendicolare medesima. L'estremità della parte prolungata sarà il punto cercato. Si suole considerare nella geometria infinitesimale una porzione di curva infinitamente piccola come una linea retta della quale la tangente sia un prolungamento. Supponiamo dunque un lato infinitesimo di curva prolungato in tangente, e immaginiamo due raggi infinitamente vicini che cadono sopra questo lato, parerebbe agli uomini poco intelligenti del metodo infinitesimale, che per

per trovare il punto di concorso delli raggi riflessi, bastasse condurre dal punto luminoso una perpendicolare a questa tangente, e prolungarla come si fa nella superficie piana.

Ma è certo che l'estremità di questa perpendicolare prolungata non è un punto della caustica; imperocchè considerando una piccola porzione di curva come retta, bisognerebbe che le perpendicolari alla curva condotte alle due estremità del lato infinitesimo fossero esattamente parallele, come lo sarebbero, se la superficie fosse retta. Il contrario è evidente, poichè le perpendicolari concorrono a una certa distanza, e col loro concorso formano il raggio detto dell'*Evoluta*. Dunque è necessario di considerare la posizione di queste perpendicolari concorrenti, per determinare la posizione delli raggi riflessi, e conseguentemente il punto di concorso il quale in questo caso è tutto altro che nella superficie retta. Considerando una curva come un poligono, le perpendicolari alla curva non devono essere perpendicolari alli lati della medesima, ma dividono ugualmente l'angolo infinitamente ottuso formato dalli lati infinitesimi, altrimente nel punto di concorso delli due lati vi sarebbero due perpendicolari, una per ciaschedun lato, la quale cosa è impossibile, non essendo che una perpendicolare ad ogni punto di curva. Dunque li raggi incidenti e riflessi devono fare colla perpendicolare angoli uguali.

Essen-

Essendo premesse queste osservazioni; Sia S un punto luminoso (*fig.* 32.) overo il foco delli raggi incidenti, PL*p* la tangente in L, sia LC, il raggio dell'evoluta in L, L*m* il raggio riflesso talmente che l'angolo CLM sia uguale a CL*s*. Allora se li raggi riflessi sono sempre tangenti della curva *bme*, essa sarà la caustica per riflessione.

Sia SP la perdendicolare alla tangente LP che incontra sempre la curva DP in qualche punto P, e sia la curva DP l'evoluta di HME, della quale PM, sia tangente in M. Si conduca SM e si prolunghi in, *m*, finchè S*m*, sia uguale a 2SM sarà *m* un punto alla caustica della curva BL. Imperocchè essendo, MP perpendicolare alla curva DP, sarà l'angolo MPS uguale al complemento di, SLP, cioè a LSP, per il metodo delle tangenti, e sarà SL divisa ugualmente in K. Onde S*m* : SM = SL : SK; e L*m*, sarà parallela a KM tangente di HME. Ma la figura, *bme*, e simile a HME e similmente posta, perciò L*m* è tangente di *bme*. Di più essendo L*m*, parallela a PM, l'angolo *m*LC = MPS = LSP = CLS. Onde essendo SL raggio incidente, sarà *lm* raggio riflesso, e il punto *m* sarà alla caustica.

Si prenda L*s* sopra il raggio riflesso = LS; dal punto C si conduca CR perpendicolare al raggio LS, e sia L*q* = *q*R, saranno *qs*, *q*R, *qm* in proporzione continua, poichè sono in proporzione continua *sq*, *s*L, 2PM (*per la teoria delle evolute*). Sia CI perpendicolare a SL in I, e si divida IL ugualmente in Q, essendo S della parte

con-

concava, e LS maggiore di LQ, ſarà PM $=$ PK (SK) $+$ KM, e 2PM $=$ sL $+$ Lm. Onde $sq : q$L (qR) $=$ sL : Lm $=$ qR : qm. Ma eſſendo S tra Q e L, allora 2PM è uguale alla differenza di Lm, Ls, e Sq : qL $=$ SL : Lm $=$ qL (qR) : qm. Si vede nell'iſteſſa maniera che eſſendo S della parte conveſſa della curva, ſono sq, qR (qL), qm in proporzione continua. Se il raggio incidente ſia perpendicolare alla curva, coincide col raggio rifleſſo, s cade in S, C in R e qm, qS ſono in proporzione continua. generalmente $sq \times qm =$ $q\text{R}^2 = q\text{L}^2$, e li raggi incidenti eſſendo paralleli coincidono li punti m, q, e $ml = \frac{1}{2}$ LR. Se LS $= \frac{1}{2}$ LI, eſſendo S nella parte concava della curva, coincidono s, q, e il raggio rifleſſo Lm diventa aſintoto della cauſtica.

Da queſti elementi ſi può facilmente ricavare l'eſpreſſione analitica. Imperocchè ſia SL $= r$, SP $= p$, ſi avrà L$q = \frac{pdr}{2dp}$ Onde Lm : SL $= \frac{pdr}{2dp}$: $r + \frac{pdr}{2dp}$. Eſſendo data l'equazione della curva LB, ſarà data la ragione di SL a SP eſpreſſa per qualche funzione delle coordinate, e perciò col calcolo infiniteſimale ſi potrà trovare la cauſtica, e al contrario data la cauſtica ſi troverà la curva di rifleſſione.

Scol. 2. Dall'eſpreſſione precedente ſi ricavano facilmente le formole analitiche date dal Bernoulli, e dal Marcheſe dell'Hoſpital. Sia $r = y$ l'archetto del cerchio deſcritto col raggio y, $= dx$

$= dx$ l'elemento dell'arco ds, ſi avrà $p = \frac{ydx}{ds}$,

$$dp = dydxds - \frac{ydxdds}{ds^2} = dydxds - \frac{ydxdyddy}{ds^3}.$$

Onde $$\text{L}m = \frac{prdr}{2rdp + pdr} = \frac{y^2dydx}{ds} : \frac{(2ydydxds - 2y^2dxdds + ydydxds)}{ds}$$

$$= \frac{y(dx^2 + dx^2)}{(2+1)(dx^2+dy^2) - 2yddy}$$, nella quale formola ſi ſuppone dx coſtante. Se li raggi incidenti ſono paralleli, eſſendo L$m = \frac{1}{2}$LR $= \frac{pdr}{2dp}$ la formola precedente ſi muta in queſta Lm $=$ $ydyds^2 : 2dyds^2 - 2ydyddy = \frac{ds^2}{-2ddy}$, poichè eſſendo in queſto caſo y infinita, ſvaniſce la quantità $2dyds^2$. Per eſempio nella parabola eſſendo $y = \sqrt{ax}$, ſarà $dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$, $dy^2 = \frac{adx^2}{4xx}$, $ddy = -\frac{adx^2}{4x\sqrt{ax}}$; onde $\frac{ds^2}{-2ddy} = \frac{a + 4x\sqrt{ax}}{2a} = lm$.

Sarà ancora facile il determinare l'interſezione del raggio rifleſſo coll'aſſe della curva. Imperocchè ſia AMD (*fig.* 33.) una curva qualunque, il raggio incidente PM ſia perpendicolare all'aſſe, QM perpendicolare alla cur-

curva, ſi avrà MP : MO = PQ : OQ, cioè, eſſendo PQ $= \frac{ydy}{dx}$, ed il triangolo MPO eſſendo rettangolo, ſarà MO $= \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 - dy^2}$. Onde ſi ricaverà ancora PO $= \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2}$. Finalmente per ritrovare le coordinate AR, FR della cauſtica, ſi cerca per la ſimilitudine delli triangoli MPO, MSF la retta PR $= \frac{dxdy}{-ddy}$ e ſi avrà FR = MP — SP $= y + \frac{dy^2 - dx^2}{-2ddy}$, e AR $= x + \frac{dxdy}{-ddy}$. Dunque eſſendo data l'equazione alla curva AMD ſi ſcacciano l'incognite x, y, e reſta l'equazione tra le coordinate AR, RF della curva cercata. Sia RF $= z$, AR $= u$, ſarà nella parabola $z = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}$, e alzando al quadrato $zz = \frac{9}{4}x - 6xx + 4x^3$. Di più $u = 3x$; onde ſi ha l'equazione della cauſtica $azz = \frac{4}{27}u^3 - \frac{2}{3}auu + \frac{3}{4}aau$.

Da queſti medeſimi principii ſi potrebbe ancora determinare la curva che rifletteſſe li raggi ſecon-

ſecondo una condizione data. Imperocchè eſſendo PQ $= \frac{ydy}{dx}$, ſoſtituendo il valore della ſottonormale PQ, ſecondo le condizioni del problema, ſi avrà un'equazione differenziale, l'integrale della quale eſprimerà l'equazione della curva. Se per eſempio ſi cercaſſe la curva, la quale ricevendo li raggi paralleli al ſuo aſſe, li riuniſſe in un dato punto. Sia NM il raggio incidente, AP $= x$, PM $= y$, la ſottonormale PQ $= s$. Sia ML il raggio rifleſſo, AL $= z$, ſarà LQ $= s + x - z$. Di più LM² $= \sqrt{\overline{z - x}^2 + y^2}$. Ma LM × MO = LQ × QO, cioè, eſſendo in queſto caſo MN infinito = QO, ſarà LM = LQ. Onde ſi avrà $s + x - z = \sqrt{\overline{+z - x}^2 + y^2}$, e quadrando $s^2 + 2sx - 2sz = y^2$. Ora in vece di s ſi ſoſtituiſca il valore $\frac{ydy}{dx}$, ſi avrà l'equazione $ydy^2 + 2xdxdy - 2zdxdy = ydx^2$, la quale integrata darà $x = \frac{y^2}{4z}$, ovvero $4zx = y^2$, che è la proprietà della parabola, nella quale il lato retto è uguale a 4AL.

 PROBL.

PROBL. III.

Data l'anamorfoſi ritrovare la parte della medeſima viſibile all'occhio in una qualunque poſizione data, nella ſuperficie d'un cilindro, o d'un cono, o anche d'un altro ſolido qualunque di rivoluzione.

E' evidente che la ſuperficie d'un ſolido qualunque di rivoluzione può conſiderarſi come compoſto di infiniti cerchj delli quali i diametri ſono le ordinate della curva genitrice. Onde dividendo l'aſſe in minime parti, li cerchj corriſpondenti rappreſenteranno tutta la ſuperficie del ſolido. Ora ſia AT*tu* (*fig.34.*) uno delli detti cerchj deſcritto dalla rivoluzione dell'ordinata AT che incontra l'aſſe AP in A. Sia O l'occhio, P il punto nel quale TP, tangente della curva genitrice taglia l'aſſe. Si conduca PO, la quale prolungata, ſe è neceſſario, incontri il piano del cerchio T*tu*, in Q. Di più condotte le rette QT, Q*t*, tangenti del cerchio in T, *t*, l'arco T*t* ſarà viſibile, l'altra parte rimanendo naſcoſta.

La dimoſtrazione è manifeſta: poichè li piani POQT, POQ*t* ſono piani tangenti del circolo e della curva genitrice in T, *t*, e conſeguentemente ancora delle minime parti della ſuperficie. Baſterà oſſervare brevemente diverſi caſi ſecondo la poſizione del punto O. Se O cadeſſe in P, tutto il circolo, T*tu* ſarebbe viſibile. Se ſi ſupponeſſe l'occhio caminare verſo *o*, in linea retta, l'arco

T*ut* diventerebbe viſibile, e rimarebbe T*t* naſcoſto. Sia l'occhio in ω, talmente che ſia ωP parallela a qualche diametro del cerchio T*tu*, ſarà T*t* un ſemicerchio, e ſupponendo ωP infinita, tutti li archi T*t* ſaranno ſemicircoli, e la projezione della figura ſarà ſimile ed uguale alla figura genitrice. Si potrebbe ancora ſupporre che il punto Q non cadeſſe fuori del cerchio T*tu*; onde la determinazione delli punti T, *t* ſarebbe impoſſibile.

Cor. Se il ſolido foſſe un cono, ſuppoſto l'occhio in P, o anche in qualunque lato del cono prolungato, ſarebbe viſibile tutta la ſuperficie del cono. Onde in queſto caſo l'anamorfoſi potrebbe vederſi in tutta la ſuperficie del cono. Ma ſe il ſolido foſſe un cilindro, è chiaro che l'arco T*t* compreſo tra le due tangenti ſarebbe ſempre minore d'un ſemicerchio, e che l'occhio collocato in un lato qualunque prolungato del cilindro non potrebbe vedere l'anamorfoſi.

NUM. V.

Dell'ombra delle figure date.

BEnchè io abbia già spiegato e dimostrato la pratica delle ombre nelli ultimi esempj della perspettiva, nulladimeno la materia essendo capace di sublimi considerazioni matematiche, ho creduto doverne trattare un poco più diffusamente in questo luogo.

PROBL. I.

Essendo dato il centro colla distanza del quadro. Data di più la linea evanescente d'un piano colla projezione d'un punto luminoso e della sua posizione su questo piano, ritrovare la projezione dell'ombra d'un punto, del quale sono date la projezione e la posizione sull'istesso piano, e trovare il punto evanescente del raggio di luce.

Sia, ET (*fig.*35.) la linea evanescente data, *s* la projezione del punto luminoso, R la projezione della sua posizione; A la projezione del punto originale del quale si cerca l'ombra; B la projezione della sua posizione, e P sia il punto evanescente delle linee perpendicolari al piano dato, il quale punto si ritrova (*per il problema* 14.). Si conduca RB che tagli la linea evanescente in V e sia condotta VP: Di poi conducendo SA, che tagli RV in C e PV in D sarà C l'ombra cercata, e D il punto evanescente del raggio di luce.

DIM.

Li punti originali di R, B, A, *s* sono in un piano perpendicolare al piano dell'ombra; onde l'ombra sarà nel punto C, che è l'interfezione del raggio SA, col piano RB. Di più V è il punto evanescente di RB. Perciò PV è la linea evanescente di RSAB, e conseguentemente D è il punto evanescente di SA.

*Cor.*1. Se il punto originale di luce sia dietro allo Spettatore, talmente che non possa essere rappresentato sul quadro, la sua projezione può dirsi imaginaria, essendo come l'ombra dell'occhio dello spettatore sul quadro. Onde deve concepirsi trasferita nella parte del piano opposta al punto originale; cioè se (*num.*2.) B fosse tra P e A, nel caso presente S deve essere tra P e R. Overo se il punto luminoso fosse il Sole, ed anche un'altra luce qualunque, purchè supposta ad una distanza infinita, coinciderebbero li punti R, V siccome ancora li punti D, S come si vede rappresentato *num.*3. ove il Sole è supposto nel quadro, e *num.*4 ove si suppone dietro allo spettatore. Onde la sua projezione imaginaria è in S.

*Cor.*2. Essendo data una figura qualunque si possono avere li punti evanescenti di tutte le linee della medesima (*probl.*2.). Onde avendo la posizione d'un punto qualunque della figura sopra il piano

piano dell'ombra, e ritrovando (*probl.*13.) la posizione di altri punti della medesima figura, si potrà con questa proposizione determinare le loro ombre.

*Cor.*3. Con questa medesima proposizione si può trasportare l'ombra d'un piano all'altro. Imperocchè essendo data la posizione d'un raggio di luce rispettivamente a un piano del quale è data la linea evanescente, sarà ancora data la posizione del raggio rispettivamente ad un'altro piano del quale la linea evanescente è data. Di più essendo data la projezione d'una linea e della sua posizione sopra uno delli piani, si troverà la projezione della posizione di questa linea sopra l'altro piano (*probl.*17.). Onde si avrà l'ombra cercata.

*Cor.*4. Questo problema colli suoi corollari basta per definire l'ombra di qualunque figura sopra qualunque piano. Col medesimo metodo si potrebbero determinare le ombre prodotte da diversi punti luminosi, o diretti, o riflessi, la qual cosa sarebbe utilissima nella pittura, e massimamente se si osservasse la diminuzione delli colori, e delle ombre secondo la maggiore distanza dalli punti luminosi, e la riflessione della luce. Ma sarebbe impossibile il determinare queste cose con un'esatta teorìa. Si potrebbe vedere a questo proposito un saggio e come un principio di sperimenti fatti dal Sig. Maraldi, e descritti nelle memorie dell'academia nell'anno 1722.

Scol. Con quest'istesso metodo si potrebbero ritrovare diversi punti ombrosi d'una curva qualunque

data, e per *approssimazione* l'ombra di tutta la curva, e la sua projezione in un piano dato; Ma li geometri sapranno determinare esattamente la curva prodotta dall'ombra d'una curva qualunque data sopra un piano dato: E'evidente che le curve formate dall'ombra d'una curva sono le curve medesime, che nascono dalla sezione d'un cono del quale il polo è il punto luminoso, e la base è la curva dàta. Onde trovando col calcolo la sezione del cono dato, e del piano di projezione, si avrà la curva cercata, come sarà chiaro dalli problemi seguenti.

PROBL. II.

Dato il cono luminoso FPG, il di cui polo sia P, e data l'altezza d'un oggetto PD in un piano dato di posizione HTA ritrovare la curva ombrosa nell'istesso piano.

E' evidente dallo Scolio precedente, che la curva cercata è l'intersezione della superficie data col piano HTA (*fig.*36.). Ora essendo RT l'asse conjugato della sezione, si conduca cn parallela ad RT, e cu parallela ad FG. Si faccia P$d = b$ il seno dell'angolo ACP $= b$, il coseno $= c$, il seno dell'angolo CPH, ovvero CPA $= p$, il coseno $= d$. Essendo CHF uguale alla somma, e PAC uguale alla differenza degli angoli HCP, CFH, sarà $bd + cp$ uguale al seno dell'angolo CHF, e $bd - cp$ uguale al seno dell'angolo PAC (*per gli elementi di trigonometria*) supposto il raggio

raggio $= 1$. Di più il seno dell'angolo PCA è al raggio come Pd è a PC, onde sarà PC $= \frac{h}{b}$.

Inoltre $bd + cp : p = \frac{h}{b} : \mathrm{HC} = \frac{hp}{b \times \overline{bd + cp}}$, e $bd - cp : p = \frac{h}{b} : \mathrm{AC} = \frac{hp}{b \times \overline{bd - cp}}$, e conseguentemente essendo $p^2 = 1 - d^2$, e $b^2 + c^2 = 1$. sarà $\mathrm{AH} = \frac{2hdp}{\overline{bb + cc} \times \overline{dd - cc}}$. Di più $d : p = \mathrm{PC}\left(\frac{h}{b}\right) : \frac{ph}{db} = rc$. Finalmente (per la natura della curva) $\mathrm{HC} \times \mathrm{AC}\left(\frac{c^2h^2}{b^2 \times \overline{d^2 - c^2}}\right) : cn^2\left(\frac{p^2h^2}{d^2b^2}\right) = \mathrm{AH}^2\left(\frac{4h^2p^2d^2}{\overline{d^1 - c^2}^{\,2}}\right) : \frac{4h^2p^2}{d^2 - c^2} = \mathrm{RT}^2$. Onde apparisce, che d essendo maggiore di c, la curva descritta è un'ellisse, della quale l'asse traverso $= \frac{2pdh}{d^2 - c^2}$, il conjugato $= \frac{2ph}{\overline{d^2 - c^2}^{\frac{1}{2}}}$, ed il parametro $= \frac{2ph}{d}$. Se $d = c$, allora la quantità $\frac{2hpd}{d^2 - c^2}$ diventa infinita, e l'ellisse si muta in una parabola, della quale il parametro $= \frac{2bh}{c}$; ma se d è minore di c, allora $\frac{2hdp}{d^2 - c^2}$ diventa negativa, e la curva si muta in iperbola, della quale l'asse trasverso $= \frac{2hpd}{c^2 - d^2}$, il conjugato $= \frac{2ph}{\sqrt{\overline{c^2 - d^2}}}$, ed il parametro $= \frac{2ph}{d}$. Finalmente se $d = o$, il parametro $\frac{2ph}{d}$ è infinito, e l'iperbola degenera in linea retta.

Questo problema sarebbe un problema di Gnomonica, se Pd essendo l'altezza d'uno stile, il piano di sezione fosse l'orizonte, e se l'asse PCB essendo parallelo all'asse della terra, l'angolo BPF, o BPG fosse uguale al complemento della declinazione del Sole supposta invariabile, e ACP uguale all'altezza del polo. Il problema essendo espresso in quest'altra maniera, la declinazione essendo maggiore del complemento della latitudine, la curva ombrosa sarebbe un'ellisse, essendo minore, un'iperbola, nel caso d'uguaglianza, una parabola; la declinazione essendo nulla, l'iperbola si muterebbe in retta, che è il caso dell'Equinozio.

Cor. Da questo problema si fa evidente quel che asserisce Nevvtono nell'Enumerazione delle linee

linee del terzo ordine: *Si in planum infinitum a puncto lucido illuminatum umbræ figurarum projiciuntur, umbræ sectionum conicarum semper erunt sectiones conicæ*. Soggiunge l'autore: *Quemadmodum circulus umbram projiciendo generat omnes sectiones conicas, sic parabolæ quinque divergentes umbris suis generant & exhibent alias omnes secundi generis curvas*. Per dimostrare quest'altra parte, premetterò il lemma seguente.

Lemma. Sia in un piano BDG (*fig.*37.) la curva BD, l'asse della quale sia BG, e sia fuori di questo piano un punto dato A, dal quale partano infinite rette terminate al perimetro della curva data, si troverà l'equazione di questa superficie conica. Sia AB $= b$, AP $= x$. Si conduca MP perpendicolare ad AB $= y$. Da un punto qualunque N della superficie conica si abbassi NM $= z$ perpendicolare al piano delle linee AB, BG. Siano BG le coordinate della curva BD, u, s. Poichè è data la posizione del punto A, sarà dato l'angolo GBA; cioè la ragione di BO ad OG sarà data conducendo GO perpendicolare ad AB, sia questa ragione $= \frac{m}{n}$. Onde si avrà

$$BG : BO = \sqrt{nn + mm} : m, \text{ e } BO = \frac{mu}{\sqrt{nn + mm}}.$$

Di più BG : OG $= \sqrt{nn + mm} : m$; onde

$$OG = \frac{nu}{\sqrt{nn + mm}}.$$

In oltre per la similitudine delli triangoli OG : BO $=$ PM (y) : PK $= \frac{my}{n}$, e AK : MK $=$ AB : BG. Onde essendo MK

$$= \sqrt{PM^2 + PK^2} = \sqrt{\frac{mm}{nn} y^2 + y^2}, \text{ e AK}$$

$$= AP + PK = x + \frac{my}{n} \text{ si avrà } x + \frac{my}{n} :$$

$$\sqrt{\frac{mm}{nn} yy + yy} \left(y \sqrt{\frac{mm + nn}{nn}} \right) = b : by$$

$$\frac{\sqrt{\frac{mm + nn}{nn}}}{x + \frac{my}{n}} = u.$$

Finalmente per la similitudine delli triangoli, KM $\left(y \sqrt{\frac{nn + mm}{nn}} \right)$: MN (z)

$$= BG \left(\frac{by \sqrt{\frac{nn + mm}{nn}}}{x + \frac{m}{n} y} \right) : DG \left(\frac{bz}{x + \frac{m}{n} y} \right)$$

$$= s.$$

In questa soluzione si suppone l'angolo GBO acuto, poichè si è presa AK $= x + \frac{m}{n} y =$ AP $+$ PK. Ma se l'angolo GBO fosse ottuso, è evidente che AK sarebbe $= x - \frac{m}{n} y$. Onde si avrebbe in questo caso $s = \frac{bz}{x - \frac{m}{n} y}$, e $u = \frac{by \sqrt{\frac{mm + nn}{nn}}}{x - \frac{m}{n} y}$. Se l'angolo fosse retto, sarebbe $m = 0$, onde verrebbero le equazioni semplicissime, $s = \frac{bz}{x}$, $u = \frac{by}{x}$.

E' evidente, che essendo data l'equazione della base BD espressa per u, s, e sostituendo i loro valori $\frac{by \sqrt{mm + nn}}{nx \mp my}$, e $\frac{bz}{x \mp \frac{m}{n} y}$ dati per l'equazione della curva, si avrà l'equazione alla superficie conica. Per esempio, il cono essendo retto, e conseguentemente $m = 0$, l'equazione precedente diventa $s = \frac{bz}{x}$, e $u = \frac{by}{x}$. Onde se la base fosse un cerchio, cioè $ss + uu = aa$, l'equazione del cono retto diventa $\frac{aa}{bb} xx = yy + zz$; e supponendo costante una delle variabili x, y, z è chiaro, che si ritornerebbe alla curva, che è la base del cono; così facendo $z = b$, si avrà $yy + xx = aa$, equazione al cerchio. Sia la curva della base $xyy = ax^3 + bxx + ex + d$, l'equazione del cono sarà $xy^2 = ax^3 + bxxz + exzz + dz^3$, nella quale supponendo di nuovo z costante, si ritrova la curva come prima. Ma se in vece di z si facesse x costante, verrebbe l'equazione $yy = a + bz + azz + ez^3$, che è l'equazione delle parabole divergenti.

Cor. Poichè le variabili u, s sono espresse per una funzione di dimensione, nulla delle coordinate della superficie conica, qualunque funzione delle medesime variabili sarà parimente una funzione di dimensione nulla delle medesime coordinate. Perciò qualunque sia l'equazione della base, tutti i termini essendo del medesimo grado dopo avere fatta la sostituzione, l'equazione alla superficie conica sarà sempre omogenea. Questa è una proprietà commune a tutte le superficie coniche, nelle quali le coordinate partono dal polo, che in tutti i termini della loro equazione le variabili prese insieme sono del medesimo grado. Onde si ricava, come nel lemma, che essendo la curva della base $xyy = ax^3 + bxx + ex + d$, l'equal'equazione del cono sarà $xy^2 = ax^3 + bxxz + exzz + dz^3$.

PROBL.

Data una superficie conica, ritrovare la curva che forma la sezione della superficie con un piano qualunque dato di posizione,

Sia una superficie qualunque espressa colle tre coordinate AP, x, PM, y, MN, z (*fig.*38.). Se un piano dato di posizione incontra li tre assi AQ, AR, AP della superficie data ne' punti B, R, Q dati, saranno date le linee AR, AQ, AB, le quali essendo chiamate a, b, c, sarà l'equazione generale del piano secante $\frac{ax}{c} + \frac{ay}{b} + z = a$. Ora per mezzo di questa equazione facendo svanire una delle variabili, e sostituendo il suo valore nell'equazione alla superficie, si avrà un' equazione composta di due variabili, la quale esprimerà la curva di projezione sopra uno de' piani, relativamente alla variabile scacciata dall'equazione. E' evidente, che la curva di projezione così trovata è dell'istessa spezie colla curva di sezione. Imperocchè l'ascissa RE della curva di sezione è all'ascissa AP della curva di projezione sul piano QAB, come RB è a AB. Nella medesima maniera EN è a PM, come RQ è a AQ. Onde essendo data l'equazione alla curva di projezione sul piano QAB, si avranno le coordinate RE, QN della curva di sezione. Per esempio, essendo RB $= m$, sarà RE, $u = \frac{mx}{c}$, e $x = \frac{cu}{m}$. Di più supposto RQ $= n$, si avrà EN, $s = \frac{ny}{b}$, e $y = \frac{bs}{n}$. Dunque nell'equazione alla curva di projezione sul piano QAB, si sostituisca in vece di x e y il loro valore $\frac{cu}{m}$, $\frac{bs}{n}$, si avrà l'equazione della curva di sezione, la quale, come è evidente, sarà dell'istessa spezie che la curva di projezione.

Cor. Sia l'equazione alle parabole divergenti $xy^2 = ax^3 + bxx + ex + d$; sarà, per il lemma precedente, $xy^2 = ax^3 + bxxz + exzz + dz^3$, l'equazione alle superficie coniche che hanno queste curve per basi. Ora in questa equazione, per mezzo dell'equazione generale al piano, si faccia svanire la variabile z, la quale è composta delle variabili x, y nel primo grado, e di costanti. Onde avendo nell'equazione della superficie la variabile z al primo, secondo, e terzo grado, è evidente, che l'equazione alla curva, fatta la sostituzione, conterrà le variabili x, y combinate insieme, e con quantità costanti, di tutte le maniere possibili in una equazione del terzo grado. Perciò la detta equazione si potrà ridurre all'equazione generale del terzo ordine $a + by + cx$

$cx + dyy + exy + fxx + gy^3 + hxyy + mxxy + nx^3 = o$. Onde l'ombra delle parabole divergenti potrà produrre tutte le curve del terzo ordine. L'equazione precedente si trasformerà nelle quattro equazioni generali del Nevvton colli metodi cogniti dagli algebristi. Si può consultare in questa materia l'eccellente opera del Sig. Cramer intitolata: *Analisi delle curve*.

In un' altra maniera.

Sia una superficie qualunque espressa colle tre coordinate AP, x, PQ, y, QM, z (*fig.* 39.). Siano AP, PQ in un piano al quale s'intenda QM perpendicolare. Sia tagliata questa superficie da un piano qualunque, del quale la commune interfezione col piano di APQ sia DT. Dal punto A abbassando in DT, prolungata, la perpendicolare AE, sarà AE il seno, e DE il coseno dell'angolo d'inclinazione ADE. Sia M un punto della sezione cercata, dal quale si abbassi MT perpendicolare a DT, l'angolo MTQ sarà uguale all'inclinazione data. Siano DT, TM le coordinate della sezione. Dal punto T sull'asse AD si abbassi la perpendicolare DTV. Di più condotta la perpendicolare TN, essendo l'angolo TQP = TDV = ADE, si avranno, per la similitudine delli triangoli, li valori x, y, z. Sia AD $= f$, AE $= a$, DE $= b$, DT $= t$, TM $= u$, sarà AD (f): AE (a) = DT (t): TV $= \frac{at}{f}$. Di più AE (a):

DE

DE (b) = TV $\left(\frac{at}{f}\right)$: DV $= \frac{bt}{f}$. In oltre DT (t): MT (u) = DV $\left(\frac{bt}{f}\right)$: QT $= \frac{bm}{g}$. Finalmente AD (f): AE (a) = QT $\left(\frac{bu}{f}\right)$: NT(PV) $= \frac{abu}{ff}$. Onde AP (x) = AV − PV = AD + DV − NT $= f + \frac{bt}{f} - \frac{abu}{ff}$. Nell' istessa maniera AD (f): DE (b) = QT $\left(\frac{bu}{f}\right)$: QN $= \frac{bbu}{ff}$. Onde PQ (y) = TV + NQ $= \frac{at}{f} + \frac{bbu}{ff}$. E' evidente di più, che QM $(z) = \frac{bu}{f}$. Se nell'equazione della superficie in vece di x, y, z si sostituiscano i loro valori espressi per t, u, si avrà un'equazione composta delle sole variabili t, u, e di costanti, che sarà per conseguenza l'equazione della sezione cercata.

Cor. 1. Poichè nelli valori di z, y, x le variabili u, t sono del primo grado, è evidente, che sostituendo questi valori nell'equazione della superficie conica, l'equazione alla curva non può arrivare a un grado più alto dell'equazione medesima alla superficie, Nulladimeno può accadere,

H 4 che

che l'equazione alla ſezione ſia d'un grado inferiore, diſtrugendoſi li termini più alti con ſegni contrarii.

Cor. 2. Sia l'equazione del cono retto, come nel lemma precedente, $\frac{aa}{bb}\,xx = yy + zz$. Soſtituendo in luogo di x, y, z i loro valori già trovati, dalla ſola oſservazione delli medeſimi valori ſi vede, che ſi avrà un'equazione compoſta delle variabili u, t in tutte le maniere poſſibili in un'equazione del ſecondo grado; onde ſi avrà la formola generale delle curve del ſecondo ordine, ovvero delle ſezioni coniche; e ſi avranno ſecondo li diverſi caſi le equazioni a una delle ſezioni coniche, variando la poſizione del piano ſecante colla determinazione delle coſtanti. Similmente ſi avrà l'equazione la più compoſta del terzo grado, ſe nell'equazione al cono, che ha per baſe le parabole divergenti $xy^2 = ax^3 + bxxz + cxzz + dz^3$, ſi ſoſtituiſcano li valori delle medeſime x, y, z. Onde ſi vede ancora in queſt'altra maniera quel che è già ſtato dimoſtrato nelli due problemi precedenti.

NUM.

NUM. VI.

Della projezione delle curve.

LA projezione delle curve è una delle materie più importanti, e più utili della geometria. Il Nevvton nel lemma 21. delli principii ha accennato la dottrina delle projezioni, ovvero delle traſmutazioni colla ſua ſolita brevità, ed eleganza. Ma eſsendo già ſtato illuſtrato diffuſamente il detto lemma nelli noſtri commenti a quella eccellente opera, mi contenterò ora di fare vedere come dalli principii di perſpettiva ſi ricava la trasformazione delle curve.

PROBL. I.

Trasformare una curva qualunque data in un'altra dell'iſteſso genere.

Sia una curva qualunque HGI (*fig.* 40.). Si conducano ad arbitrio le due parallele AO, BL, le quali tagliano la retta AB, data di poſizione in A, B. Da un punto qualunque G della curva ſi conduca GD parallela ad AO. Di poi da qualche punto O dato nella linea OA, al punto D ſi conduca la retta OD, che incontrerà BL in d. Finalmente dal punto d ſi conduca dg, la quale faccia colla retta BL un angolo qualunque dato, talmente che dg ſia ad Od, come DG ad OD, ſarà g la projezione del punto G. Nell'iſteſsa maniera

niera si troveranno gli altri punti della curva. E' evidente, che questa costruzione si riduce al primo problema della Perspettiva, essendo O il punto di veduta, o polo, e a il centro del quadro. Si troverà facilmente l'equazione della nuova curva; imperocchè per la similitudine delli triangoli aDO, AOD, sarà $ad : OA = Od : OD$, e per costruzione $od : OD = dg : DG$. Di più essendo parallele le rette AO, Bd, sarà $Od : OD = AB : AD$. Onde $ad : OA = dg :$ $DG = AB : AD$, e perciò $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$, e $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$. Sia DG la prima ordinata $= y$, dg la seconda ordinata $= u$, la prima ascissa $AD = x$, la nova ascissa $ad = z$. Si faccia $OA = a$, $AB = b$, sarà $x = \frac{ab}{z}$, e $y = \frac{au}{z}$, dalli quali valori si potrà ricavare l'equazione della nova curva, sostituendo in vece di x, y i loro valori per z, u.

Sia per esempio l'equazione alle sezioni coniche $y^2 = px^2 + qx + s$, si avrà $u^2 = \frac{s}{a^2} \times z^2 + \frac{qb}{a} \times z + pb^2$. Sia $y^2 = px^3 + qx^2 + sx + t$, l'equazione alle cinque parabole divergenti,

genti, sarà $u^2 z = \frac{t}{a^2} \times z^3 + \frac{sb}{a} \times z^2 + qb^2 \times z + pb^3 a$. Generalmente l'equazione $y^m = px^n + qx^{n-1} + sx^{n-2} + tx^{n-3} + \&c. + w$, darà l'equazione alla nova curva $u^m z^{n-m} = p \times b^n a^{n-m} + q \times b^{n-1} a^{n-m+1} \times z + s \times b^{n-2} a^{n-m+2} \times z^2 + t \times b^{n-3} a^{n-m+3} \times z^3 + \&c. + w \times a^{-m} \times z^n$. Si procederebbe nell'istesso mòdo, se l'equazione proposta contenesse qualunque funzioni delle variabili x, y. Se l'equazione ritrovata si dovesse ridurre ad una forma più semplice, si adopererebbe ancora l'artifizio delle trasformazioni; per esempio, se secondo il metodo del Nevvton si dovesse abbassare l'equazione, si troverebbe un'altra equazione della medesima curva, supponendo le ordinate parallele a qualche asintoto. Il calcolo è più lungo che difficile, e si può leggere in questa materia il libro già lodato del Sig. Cramer.

Cor. 1. Dalli valori ritrovati delle variabili x, y è manifesto, che l'equazione della curva trasformata è dell'istesso ordine colla nova curva. Onde ancora se l'equazione della prima curva fosse differenziale, sarebbe differenziale l'equazione della curva nova,

Cor.

*Cor.*2. Col metodo delle projezioni ſi potranno determinare le proprietà delle curve. Se in un piano originale vi ſia una retta qualunque, la quale prolungata, ſe ſia neceſſario, incontri la commune interſezione del piano originale, e del piano di projezione, la projezione d'un punto qualunque dato in queſta linea, tanto più, o meno ſarà diſtante dalla linea evaneſcente, quanto ſarà minore, o maggiore la diſtanza del punto dalla linea dirigente. Onde ſi ricava facilmente, che li rami infiniti d'una curva qualunque ſi buttano nella linea evaneſcente (ſarà a propoſito di rivedere in queſto luogo le definizioni date nel principio della Perſpettiva). Si potrà conoſcere dalla projezione della tangente ad una diſtanza infinita, ſe la linea evaneſcente diventi aſintoto della curva, ſe ne ſia ſecante, o tangente, e in quali punti. Mutata l'inclinazione delli piani, o la poſizione della figura data, talmente che la curva ſia ſecata dalla linea dirigente, da ogni interſezione naſceranno nella curva di projezione due rami iperbolici. Se la linea dirigente ſecaſſe la curva in due punti, condotte a queſti due punti due tangenti, che concorrano in un punto, ſi avranno per ogni punto di contatto due rami iperbolici alle aſintoti formate dalle tangenti. Se la linea dirigente è concepita moverſi d'un moto parallelo, finchè ſia tangente della curva, quanto più ſi accoſterà la mutua interſezione delle tangenti alla ſommità della curva, tanto più ſarà lontana la ſua projezione. Ma ſe l'interſezione cade nella ſommi-

ſommità medeſima, cioè nella linea dirigente, non vi ſaranno aſintoti, e li rami d'iperbolici diventeranno parabolici. Nell'iſteſſa maniera, ſe la linea dirigente ſia ſecante della curva in un punto, e tangente in un altro, vi ſaranno due rami iperbolici, e due parabolici; allora la curva ſarà di quel genere di curve, che ſi chiamano *Iperbolo parabole*. Li rami infiniti d'una curva ſono ſempre in numero paro. Onde in alcuni caſi può accadere che li rami ſiano poſti dalla medeſima parte. Per eſempio, la curva eſpreſſa per l'equazione $y = \frac{x^2}{a} + \sqrt{ax}$ ha due rami parabolici. Ma ſupponendo l'aſciſſa x negativa, l'ordinata y ſarà imaginaria, e per conſeguenza un ramo non andando dalla parte delle ordinate imaginarie, è neceſſario, che li due rami vadano dall'iſteſſa parte.

*Cor.*3. Il piano originale, ed il piano di projezione ſono reciprochi tra di loro, e per conſeguenza ancora ſono reciproche la linea dirigente, e la linea evaneſcente. Onde è evidente, che una curva qualunque può conſiderarſi come prodotta dalla projezione d'un'altra, cioè un punto qualunque della curva di projezione diventerà il punto originale medeſimo, ſe ſi concepiſca la curva di projezione come curva originale; e poichè la tangente della curva nell'interſezione colla linea dirigente diventa aſintoto, vicendevolmente gli eſtre-

eſtremi dell'aſintoto ritorneranno al contatto nella linea evaneſcente. Onde ſi ricava, che un aſintoto retta incontra la curva in tanti punti, quante ſono le dimenzioni della curva meno due; imperocchè le due interſezioni dalle quali è formato il contatto ſvaniſcono nella projezione. Onde l'aſintoto d'una linea del terzo ordine ſeca la curva in un ſolo punto, e l'aſintoto dell'iperbola conica in neſſuno. Due rami parabolici trovandoſi in qualche curva tolgono due delle aſintoti rette, che poteva avere la curva; così nelle linee del terzo ordine, le quali ammettono tre aſintoti per il numero delli punti nelli quali poſſono eſſere ſecate dalla linea dirigente, ſe vi ſaranno due rami parabolici, non vi reſterà che un aſintoto per i due rami iperbolici. Le interſezioni, e le infleſſioni reſteranno ancora nella curva di projezione, purchè non ſiano nella linea dirigente. Rimarranno anche l'interſezione, il contatto, il nodo, il punto di fleſſo contrario &c. Onde ſiegue, che la curva di projezione ſarà dell'iſteſſo ordine colla curva traſformata; imperocchè il grado della curva è dimoſtrato dal numero delli punti, nelli quali è tagliata da una retta, e queſto numero è l'iſteſſo nella curva di projezione. Si deve eccettuare il caſo in cui l'interſezione è nelle linea dirigente, la quale eſſendo nella projezione mandata all'infinito, ſaranno le interſezioni della curva di projezione $n-1$, ſe le interſezioni della curva traſformata ſiano n. E queſta è la ragione per la qua-

quale le ordinate parallele a qualche aſintoto nell'equazione d'una curva ſono abbaſſate d'una dimenzione.

PROBL. II.

Enumerare le ſpecie delle curve col metodo delle projezioni.

Siano da enumerarſi le curve prodotte dalla parabola divergente coll' ovale conjugata, la quale curva è eſpreſſa coll'equazione $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, nella quale ſuppoſta $y = o$, li tre valori dell'aſciſſa x ſono reali e diſuguali, ſi avrà la parabola divergente campaniforme, che è la ſpecie 67. nell'enumerazione fatta dal Nevvton. Si poſſono conſiderare diverſi caſi. Si ſupponga primieramente la linea dirigente perpendicolare all'aſſe della figura, o parallela alle ordinate. Se la linea dirigente (*fig.*41.) ſeca l'aſſe in A fuori della curva, la parabola anderà in iperbola conchoidale, l'aſintoto ſarà la linea evaneſcente, nella quale ancora ſi butta l'ordinata infinitamente diſtante. L'ovale anderà in un altra ovale poſta nel vertice della conchoidale. Sarà la ſpecie 39. dell'enumerazione citata. Se la linea dirigente ſia tangente dell'ovale in B, ſi muta l'ovale in parabola, e ſarà la ſpecie 55. Se la linea dirigente ſeca l'aſſe in O, e l'ovale nelli punti T, T, condotte alli medeſimi punti T, T, le tangenti che concorrano verſo A, le loro projezioni ſaranno due aſintoti alle iperbole formate dall' ova-

ovale. Il concorſo delle aſintoti caderà ſopra la linea evaneſcente, che ſarà la terza aſintoto. Specie 21. Se la linea dirigente ſeca l'aſſe in D, talmente che le tangenti in T, T diventino parallele, queſte tangenti ſi butteranno in due aſintoti che concorreranno nella terza aſintoto. Specie 31. Sia l'interſezione nel punto E, talmente che le tangenti concorrano dall'altra parte, il triangolo formato dalle aſintoti nella projezione caderà al di ſotto dell'aſintoto della conchoidale. Specie 20. Se la linea dirigente ſia tangente dell'ovale in F, ſarà mutata l'ovale in parabola, il vertice della quale ſarà ſopra l'aſintoto della conchoidale. Specie 56. Se la linea dirigente taglia l'aſſe in G tra la parabola e l'ovale, la projezione ſarà la ſpecie 40. Se la linea dirigente ſia tangente della parabola in H, ſi avrà la curva iperbolo parabolica con un ovale poſta ſull'aſintoto. Queſta ſpecie non ſi trova nell'enumerazione fatta dal Nevvton; la ſua equazione è $xy^2 = bx^2 + cx + d$, che è la medeſima colla ſpecie 55., purchè le radici dell'equazione $bx^2 + cx + d = o$, ſi pongano negative, o che il coefficiente c ſia affirmativo. Se la linea dirigente taglia la parabola nelli punti S, S, ove è concava verſo l'aſſe, condotte le tangenti SO, SO, concorreranno tra le parabole e l'ovale, per eſempio in O, e chiuderanno l'ovale nell'angolo che ivi formano; ma prodotte dall'altra parte taglieranno li rami parabolici. Perciò la projezione ſarà compoſta di tre iperbole con un ovale compreſa

preſa nel triangolo delle aſintoti. L'iperbola nella quale ſi butta l'arco compreſo tra la linea dirigente e il vertice ſi chiama *inſcritta*; le due altre prodotte da rami infiniti ſi dicono *ambigene*. Queſta ſpecie è ſtata omeſſa dal Nevvton.

Ho conſiderato il caſo, in cui la linea dirigente è parallela alle ordinate, ora ſi ſupponga che non vi ſia queſto paralleliſmo. Se la linea dirigente ſeca la parabola in un punto qualunque T dall'una o dall'altra parte del fleſſo contrario (*fig.* 42.) e non arrivi all'ovale, la tangente TQ in queſto punto ſarà aſintoto della curva di projezione. Le eſtremità delli rami nella projezione ſi uniranno con un fleſſo contrario nella linea evaneſcente; dall'ovale naſcerà un ovale, e la curva diventerà un' *Iperbola anguinea* coll'ovale. Specie 33. Rimanendo il punto T colla tangente TQ, ſi concepiſca intorno a eſſo punto rivolgerſi la linea dirigente, finchè ſia tangente dell'ovale in N, o, K, reſterà l'iperbola anguinea, e l'ovale ſarà traſformata in parabola. Specie 52. Si rivolga la linea dirigente, talmente che tagli l'ovale nelli punti R, R, ove le tangenti dell'ovale formano colla tangente TQ il triangolo SQM, overo queſte tangenti ſiano parallele, nell'uno e nell'altro caſo la projezione ſarà compoſta di due iperbole inſcritte alle aſintoti formate dalle tangenti dell'ovale, e di una terza iperbola anguinea. Specie 9. Se la poſizione della linea dirigente ſia tale, che le tangenti in R, R concorrano colla terza TQ, le aſintoti paſſeranno per l'iſteſſo punto nella curva di projezione. Specie 26. Se la linea dirigente sia secante della parabola in T, e tangente in X, o, X2, la projezione sarà composta di due iperbole parabole, una delle quali è secata dall'asintoto con un ovale conjugata. Specie 46. Se la linea dirigente seca la parabola nelli punti T, B, C, le tangenti in questi punti TQ, FG, HI che non possono ne convergere nell'istesso punto, ne essere tutte parallele, produranno altrettante asintoti che formano il triangolo nel quale è compresa l'ovale; ma la parabola darà tre iperbole, delle quali quella che nasce dalli rami infiniti sarà circonscritta: imperocchè le tangenti nelli punti estremi T, C incontrano tutte due li rami, almeno nella projezione; ma la tangente in B incontra l'una delle parti intermedie TB, o BC, purchè il punto B non sia un flesso contrario; onde quella parte produrrà un iperbola ambigena; la terza darà l'iperbola inscritta. Specie 1. Se la linea dirigente coincida coll'asse, le tre tangenti parallele nella projezione passeranno per quell'istesso punto della linea evanescente nel quale concorrono le estremità delli rami. Specie 27.

Nella medesima maniera che la prima parabola divergente è stata ridotta in diverse specie, potrebbero ridursi ancora le quattr' altre parabole considerate dal Nevvton, o anche qualunque altre curve di qualunque genere. Onde si dimostrerebbe anche in questo modo quel che ha asserito Nevvtono dell'ombra delle parabole divergenti. *Cor. Probl.* 2. *num.* v.

Schol.

Scol. 1. Sarà facile il ridurre le curve di projezione alle equazioni Nevvtoniane. Imperocchè le tre sommità della figura trasformata B, F, H (*fig.* 41.) supponendo l'ordinata $= o$, daranno le sommità della curva di projezione. Presa per prima ordinata la linea evanescente, la posizione della linea dirigente farà conoscere la posizione di queste sommità, cioè, si avranno li segni delli valori dell'ascissa, essendo l'ordinata $= o$. In questa maniera si vede, che nella specie 40. le projezioni delli punti B, F cadono al di sopra della linea evanescente, la projezione del punto H cade al di sotto della medesima. Nell'equazione della curva $xy^2 = -ax^3 + ax^2 + cx + d$, essendo l'ordinata $= o$, vi saranno due valori dell'ascissa x col medesimo segno, e il terzo col segno contrario. E' evidente che la curva di projezione è espressa con questa equazione; imperocchè questa curva avendo un diametro, manca il termine ey; e poichè oltre le sommità nelle quali si buttano li punti F, H nella projezione, l'ordinata diventa imaginaria, il termine il più alto ax^3 deve avere il segno $-$. Se la linea dirigente passando per qualche sommità, l'istessa sommità si butti all'infinito, l'equazione Nevvtoniana si abbassa d'un grado, e in vece di $xy^2 = ax^3$ &c., si fa $xy^2 = bx^2 + cx + d$. Si deve finalmente osservare che li punti di flesso contrario restano nella figura trasformata, e nella figura di projezione, purchè la linea dirigente non passi per essi punti. Dalla projezione si conoscerà verso

 quale

quale parte della projezione cadano li detti punti. Per determinare a quale equazione appartenga qualche projezione, per eſempio, la ſpecie 9.; dal punto T (*fig.* 42.) ove la dirigente ſeca la curva, condotte tutte le tangenti poſſibili TX, TX², TK, TN, le loro projezioni parallele tra di loro, e all'aſintoto prodotta dalla TQ, ſaranno tangenti della curva di projezione; il numero delle tangenti, e la loro poſizione riſpettivamente a TQ moſtreranno le dimenzioni dell'equazione, e i ſegni delle radici. Sia l'equazione $x^4 + bx^3 + \&c. = o$, la quale eſprima le aſciſſe compreſe tra qualche aſintoto conſiderata come prima ordinata, e tra le rette parallele all'aſintoto tangente della curva, o che paſſano per un punto doppio. In queſta equazione deſcritta dal Nevvton nell'enumerazione delle linee del terzo ordine, le radici ſono reali e diſuguali. Ma le tangenti TK, TX nella projezione buttandoſi al di ſotto di TQ, e TX², TN al di ſopra, ſi vede che due radici hanno delli ſegni contrarii alle due altre. Preſa per prima ordinata l'aſintoto prodotta dalla tangente dell'ovale SM; poichè dal punto del contatto R una ſola retta SM può eſſere tangente della curva, le radici dell'equazione ax^4 &c. ſaranno tutte imaginarie.

Scol. 2. E' evidente che ſi potranno trattare nell'iſteſſa maniera le curve di ordini ſuperiori, avendo prima enumerate le curve *genitrici*, ovvero traſformate. Per eſempio nelle curve del quarto ordine ſi traſformeranno le curve eſpreſſe colle

colle equazioni y^2 e $y^4 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Nel quinto ordine le curve rappreſentate per le equazioni y^2 e $y^4 = ax^5 + bx^4 + \&c.$ Nel ſeſto e ſettimo ordine, le dimenzioni dell'ordinata ſiano y^2, y^4, y^6 &c. Queſte equazioni traſformate per il metodo delle projezioni oblique, ſaranno generali nell'ordine della curva genitrice. Ma ſarebbe coſa troppo lunga di trattare queſta materia più diffuſamente.

NUM. VII.

Delle projezioni circolari, e del loro uso nell' astronomia.

LA projezione del cerchio generalmente considerata non solamente contiene tutta la dottrina delle sezioni coniche, ma anche è di grandissimo uso nell'astronomia. Onde aggiungerò in questo luogo alcune proposizioni appartenenti a questa materia, le quali si possono ricavare facilmente dalli principii precedenti.

PROBL. I.

Ritrovare la projezione d'un cerchio in un piano qualunque dato di posizione.

Sia LS (*fig.*43.) l'interfezione, HN la linea dirigente, CI la linea evanescente, APTB un cerchio per il centro del quale s'intenda condotto un piano verticale che tagli il piano del cerchio nel diametro AB, e si supponga HN fuori del cerchio. Si ritrovi ab projezione del diametro AB; di più condotte dal punto H, ove la linea dirigente incontra il piano verticale, le rette HΓ, HT tangenti del cerchio in T, T, si trovi la projezione tt della retta TT, l'ellisse $aptb$ descritta con gli assi ab, tt, sarà la projezione del cerchio dato APTB. Imperocchè le rette AH, TH, TH concorrendo nella linea dirigente, le tangenti

dell'ellisse in t, t saranno parallele all'asse ab, cioè tt sarà l'asse conjugato di ab. Per esprimere la curva analiticamente, sia PM ordinata del cerchio $= y$, l'ascissa HM $= x$, il diametro AB $= d$; la distanza HB del cerchio dalla linea dirigente $= l$, sarà $y^2 = -x^2 + \overline{d + 2l} \times x - \overline{d + l} \times l$. Si faccia pm ordinata nova $= v$, l'ascissa C$m = z$, HG $= a$, CG $= r$, si avrà per l'equazione della projezione $v^2 = -\frac{\overline{d+l}}{r^2} \times l \times z^2 + \frac{\overline{d+2l}}{r} \times a \times z - a^2$, che è l'equazione a un ellisse, la quale sarà data di specie, purchè sia dato il coefficiente del termine $-z^2$. Imperocchè gli assi ab, tt saranno tra di loro come r a $\sqrt{\overline{d+l} \times l}$. ovvero come CG alla tangente HT. Se fosse $\frac{\overline{d+l} \times l}{r^2} = 1$ la projezione diventerebbe un cerchio.

Ho supposto in questo caso, che la linea dirigente HN non toccasse il cerchio ABT, ora sia la linea dirigente tangente in B, essendo $l = 0$ l'equazione della curva di projezione, sarà $v^2 = \frac{da}{r} \times z - a^2$, che esprime una parabola, il parametro della quale $= \frac{da}{r}$. Finalmente se la linea dirigente è secante del cerchio, per esempio, in IKT, eſſendo l negativa, l'equazione della curva di projezione ſarà $z^2 = \frac{\overline{a -}}{i^2} \times l + \frac{\overline{d - 2l}}{r} \times a - a^2$. Onde in queſto caſo ſi avranno due iperbole oppoſte, le ſommità delle quali ſono a, b, le aſintoti ſono le due tangenti, ed il loro concorſo è il centro delle iperbole. Si può leggere una ſoluzione conſimile dell'iſteſſo problema nelli noſtri comenti alli principii del Nevvton *Lem.* 22.

Cor. 1. Se il cono BTAZ (*fig.* 44.) deſcritto ſul circolo BTA è ſecato nel diametro AB da un piano BAZ perpendicolare alla baſe, ſi troverà la poſizione del piano ſecante, talmente che la ſezione ſia data di ſpecie. Conſidererò il caſo dell'elliſſe. Prodotto, ſe è neceſſario, il diametro AB, ſi abbaſſi dal vertice Z la retta ZH, talmente che il rettangolo AH $\times$ HB ſia ad HZ² in ragione data di F a G, cioè in ragione duplicata dell'aſſe perpendicolare ſul piano verticale all'altro aſſe; condotta la retta CG parallela ad HZ, la ſezione del cono fatta per CG da un piano retto al piano verticale, ſarà la ſezione cercata. Avendo abbaſſato la perpendicolare ZI, ſi conduca la retta ZH per mezzo dell'equazione quadratica $\overline{G - F} \times x^2 + G \times \overline{AB \pm 2BI} \times F \times x = F \times ZB^2$, nella quale equazione, ſe le radici x, o BH hanno il medeſimo ſegno, li due punti H ſaranno dalla parte di B. Se ſiano uguali vi ſarà una ſola ZH

ZH determinata dal *maſſimum* della ragione $\frac{F}{G}$.

Se le radici ſono imaginarie o impoſſibili, la ragione richieſta è troppo grande. Si determinerà facilmente queſta maſſima ragione, conducendo nel triangolo ZBA la retta ps parallela al diametro AB, e ſecata in r dalla retta tu, talmente che il triangolo Ztu ſia iſoſcele. Di più ſi faccia il rettangolo $ur \times rt$ a rs^2, come tu^2 (G) a F, ſarà la ragione $\frac{F}{G}$ la maſſima. Ovvero ancora condotta Zb parallela a tu, ſarà la maſſima $\frac{F}{G} = \frac{Ab \times bB}{Zb^2}$. Nel cono retto la ragione maſſima è d'ugualianza, cioè il piano ſecante è parallelo alla baſe.

Cor. 2. Se la curva originale foſſe una ſezione conica qualunque, la projezione della quale doveſſe eſſere una ſezione conica data di ſpecie, ſi procederebbe coll'iſteſſo metodo. Sia per eſempio ABT un'elliſſe, l'aſſe AB $= t$, l'aſſe conjugato $= c$, l'equazione della curva di projezione ſarà

$$z^2 = \frac{-c^2 \times \overline{t \pm l} \times \pm l}{t^2\, i^2} z^2 + \frac{ac^2 \times t \pm 2l}{t^2\, r} z \frac{-c^2\, a^2}{t^2}.$$

Onde il problema ſi riduce a trovare l'inclinazione del piano CG, nel quale la projezione ſarà un elliſſe, o un iperbola di ſpecie

cie data, prendendo $\frac{t \pm l}{r^2} \times l$, ovvero $\frac{AHB}{ZH^2} = \frac{b^2}{c^2} \times \frac{F}{G}$; o ſe la ſezione doveſſe eſſere un cerchio $\frac{AHB}{ZH^2} = \frac{t^2}{c^2}$.

Cor.3. Se il punto Z foſſe dato fuori del piano verticale che paſſa per l'aſſe, dato il piano di projezione ſarà data la linea dirigente HN, alla quale ſi faccia parallelo il diametro $EF = c$ e ſi dica il diametro conjugato $= t$ eſſendo dato l'angolo delle ordinate, ſi troverà la curva di projezione come ſopra. Ma ſe foſſe propoſto di ritrovare la poſizione del piano ſecante talmente che la Sezione ſia data di ſpecie; avendo condotto il diametro HBA, il rettangolo AHB deve eſſere a ZH^2 in ragione data. Di più tirata HN parallela alle ordinate al diametro AB, l'angolo ZHN deve eſſere retto: overo ſe la baſe ſia una parabola l'angolo ZHN è retto, e il rettangolo fatto da HB e dal parametro del diametro ſarà a HZ^2 in ragione data, la quale ſarà ragione d'uguaglianza, ſe la Sezione cercata è un cerchio. Aggiungerò la ſoluzione di queſto ultimo caſo il quale contiene tutti gli altri più ſemplici, poichè colli principii precedenti una baſe qualunque ſi trasforma facilmente in parabola, e il circolo in una Sezione data di ſpecie.

Dal

Dal punto dato Z (*fig.45.*) ſi abbaſſi nel piano della parabola la perpendicolare ZI che l'incontra nel punto I dal quale ſi alzi IR perpendicolare all'aſſe. Dal punto cercato H, ſe ſia HB diametro della parabola che incontri la retta IR in M e la curva in B, ſi conduca al punto B la tangente BX e l'ordinata all'aſſe BL, la retta HN parallela a BX tagli l'aſse in N; finalmente condotte le rette ZH, ZN, ZR ſia NK normale ad HM fatta queſta coſtruzione, chiamato p il parametro dell'aſſe, ſarà $p + 2LX$, ovvero $p + 2HK$ il parametro del diametro cercato HB, e BX^2 (HN^2) $= \frac{1}{2} HK \times \overline{p + 2HK}$, ed eſsendo per la condizione del problema il quadrato di HZ uguale al rettangolo di HB nel parametro del diametro, ſi avrà $\overline{NX + \frac{1}{2} HK} \times \overline{p + 2HK}$, cioè $\overline{RV - KM} \times \overline{p + 2HK} = ZH^2 + HN^2 = ZR^2 + KM^2 = ZN^2$, eſsendo ZHN, ZRM angoli retti. Ma $MR^2 = HN^2 - HK^2 = \frac{1}{2} HK \times p$, e $IM = IR - \sqrt{\frac{1}{2} HK \times p}$; di più $HK : MR = IM : HM$. Onde ſarà $KM = HM - HK = \frac{IR \times \sqrt{\frac{1}{2} HK \times p} - \frac{1}{2} HK \times p}{HK} - HK$.

Que-

Queſto valore della retta KM ſi faccia uguale al valore che ſi ricava dall'equazione quadratica $ZR^2 + KM^2 = \overline{RV - KM} \times \overline{p + 2HK}$, e ſcrivendo x per l'incognita HK, ed il quadrato QQ per le quantità cognite $p \times RV + \frac{1}{2} p^2 - ZR^2$ ſi avrà $x^3 + \overline{p + 2RV} \times x^2 + QQ \times x - \frac{1}{2} p \times IR^2 = o$. Ora eſsendo data per la coſtruzione dell'equazione cubica la retta $HK = 2LV$, ſarà dato di poſizione il diametro BH. E' data ancora per l'equazione quadratica la retta KM o NR; è dato il punto N, dal quale condotta la retta NH parallela alla tangente BX e che incontra il diametro BH in H, eſsa ſarà la linea dirigente, e ſi avrà la retta ZH. Il valore negativo della retta KM ſuppoſta dall'altra parte del punto R darà un'altra linea dirigente che ſodisferà al problema.

Scol. Il corollario precedente contiene il problema propoſto e ſciolto da Carteſio: cioè data di poſizione e di grandezza qualunque Sezione conica, parabola, iperbola, o elliſſe, e dato un punto fuori del piano delle medeſime, ritrovare la poſizione e la grandezza del cerchio che è la baſe del cono dalla Sezione del quale poſſono eſſere formate le dette figure. Queſt'iſteſſo problema è ſtato ſciolto di poi da molti. Se ne legge una ſoluzione elegante nelle Sezioni coniche del Marcheſe del Hopital *lib.* 10. *prop.* 10., e l'equazione alla quale è arrivato il celebre Autore è affatto l'iſteſſa colla precedente. E' evidente che queſto medeſimo problema ſi potrebbe ſcogliere col mezzo delle formole analitiche del *num.* V.; poichè non dipende che dall'eſpreſſione del piano ſecante e dalla natura della Sezione. Si può conſultare quel che ne ha ſcritto il dottiſſimo Hermanno *tom.* 6. delle memorie di Pietro burgo.

PROBL. II.

Spiegare le projezioni aſtronomiche.

Sia Z un punto nella ſuperficie della sfera (*fig.* 44.) CG l'interſezione del piano verticale e d'un piano parallelo al cerchio, del quale è Z il polo. Sia BTA il cerchio del quale ſi cerca la projezione. La retta HZ parallela a CG cada nel piano del cerchio in H, e ſi conduca la tangente HT del cerchio in T. Poichè li punti Z, T ſono nella ſuperficie della sfera, le tangenti ZH, TH ſono uguali, e la projezione nel piano CG, o in un'altro piano parallelo a BG ſarà un cerchio. Queſte ſorte di projezioni ſono chiamate *Stereografiche*.

Se la retta ZV che incontra il diametro BA in V, e *ba* in *u* divide in due parti uguali l'angolo BZA, la medeſima retta prolungata caderà nel polo del circolo BTA; onde la ſua projezione ſarà il punto *u*. Si alzi nel punto V un piano parallelo al piano di projezione il quale tagli il piano verticale in VQ. Se intorno a ZV come aſſe immamaginiamo rivolgersi un piano che seca il piano dell' asse, ed il piano condotto per VQ, è evidente che gli angoli fatti dalle interfezioni colle rette VA, VQ saranno uguali; poichè li piani restano li medesimi rispettivamente all'asse di rivoluzione. Di più gli angoli nel piano VQ, sono uguali agli angoli in *ua*; onde saranno uguali agli angoli nel piano BTA, o in un altro piano qualunque parallelo al medesimo, e specialmente nel piano che tocca la sfera nel polo del circolo BTA. Dal che si ricava che gli angoli qualunque in una superficie sferica restano li medesimi nella projezione, la quale cosa si può anche facilmente dedurre dalla projezione delle rette tangenti della sfera in un punto qualunque. Questa osservazione potrebbe essere di somma utilità nella Trigonometria sferica.

Se li punti V, *u* dividono proporzionalmente li diametri AB, *ab* la retta condotta per la projezione *u* del polo, taglia archi simili agli archi originali scambievolmente verso le parti delli punti V, *u*; per esempio, se (*fig*.46.) *ab* sia la projezione del diametro AB, e *u* la projezione del polo, si troverà la projezione *ac* dell'arco AC dividendo AC in V talmente che sia AV : BV = *bu* : *au*, e condotta la retta CV che tagli l'arco BK, l'arco simile, *ac*, sarà l'arco cercato.

Non sarà più difficile di spiegare un'altra specie di projezione chiamata *gnomonica* nella quale l'occhio si suppone nel centro della sfera. In questo caso la projezione delli cerchj massimi sono

no linee rette, delle quali quelle che rappresentano li meridiani o li cerchi orarii convergono nella projezione del polo del mondo. Il meridiano normale al piano dell'oriuolo lo taglierà nella *Sostilare*. Se nel piano del meridiano dal centro si alzi una perpendicolare all' asse, che incontrerà il piano dell'oriuolo in un punto dal quale si tiri una perpendicolare alla Sostilare, questa perpendicolare prodotta all'infinito dall'una e l'altra parte sarà la projezione del cerchio *equinoziale*. Onde presa la perpendicolare all'asse per raggio, la perpendicolare alla Sostilare rappresenterà la tangente. Perciò si potrà sempre tagliare in questa tangente un segmento proporzionale a un'arco qualunque dell' equinoziale, e si condurranno le linee orarie.

Le projezioni delli cerchj minori saranno Sezioni coniche date, purchè sia dato di posizione l'oriuolo. E' utilissima la projezione delli tropici nel disegnare gli oriuoli Babilonici e Italici, nelli quali le ore non cominciano dal meridiano, ma dall' orizonte, cioè dal nascere o tramontare del Sole, e le ore sono indicate non dall'ombra dell'asse, come negli altri oriuoli, ma dal vertice dello stile il quale si considera come centro della sfera.

Ho spiegato in questa proposizione la projezione Stereografica e gnomonica della sfera, resterebbe ora a dire qualche cosa della projezione ortografica, ma essendo facilissima basterà quel che ne è stato detto nel principio della perspettiva.

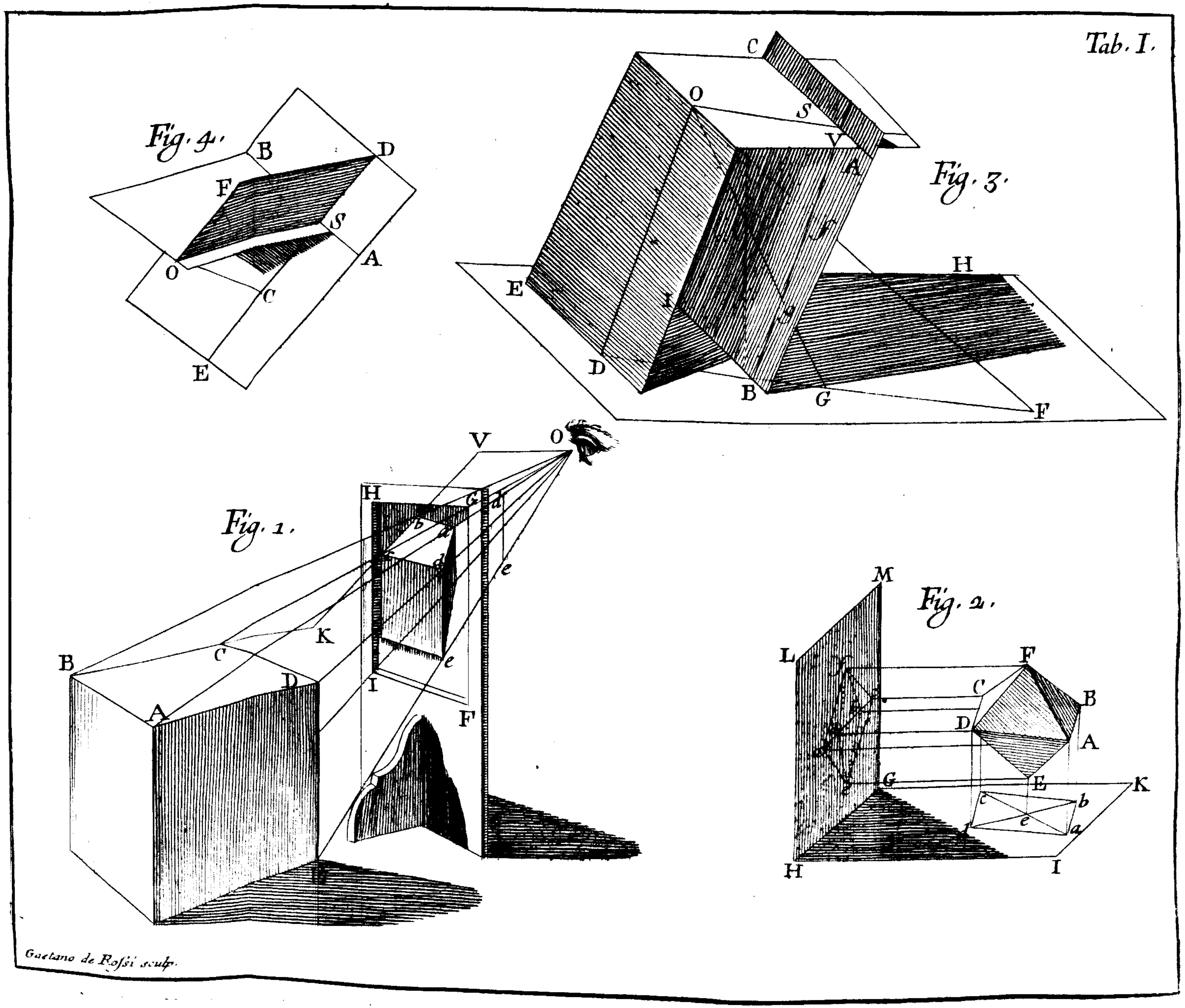
Scol.

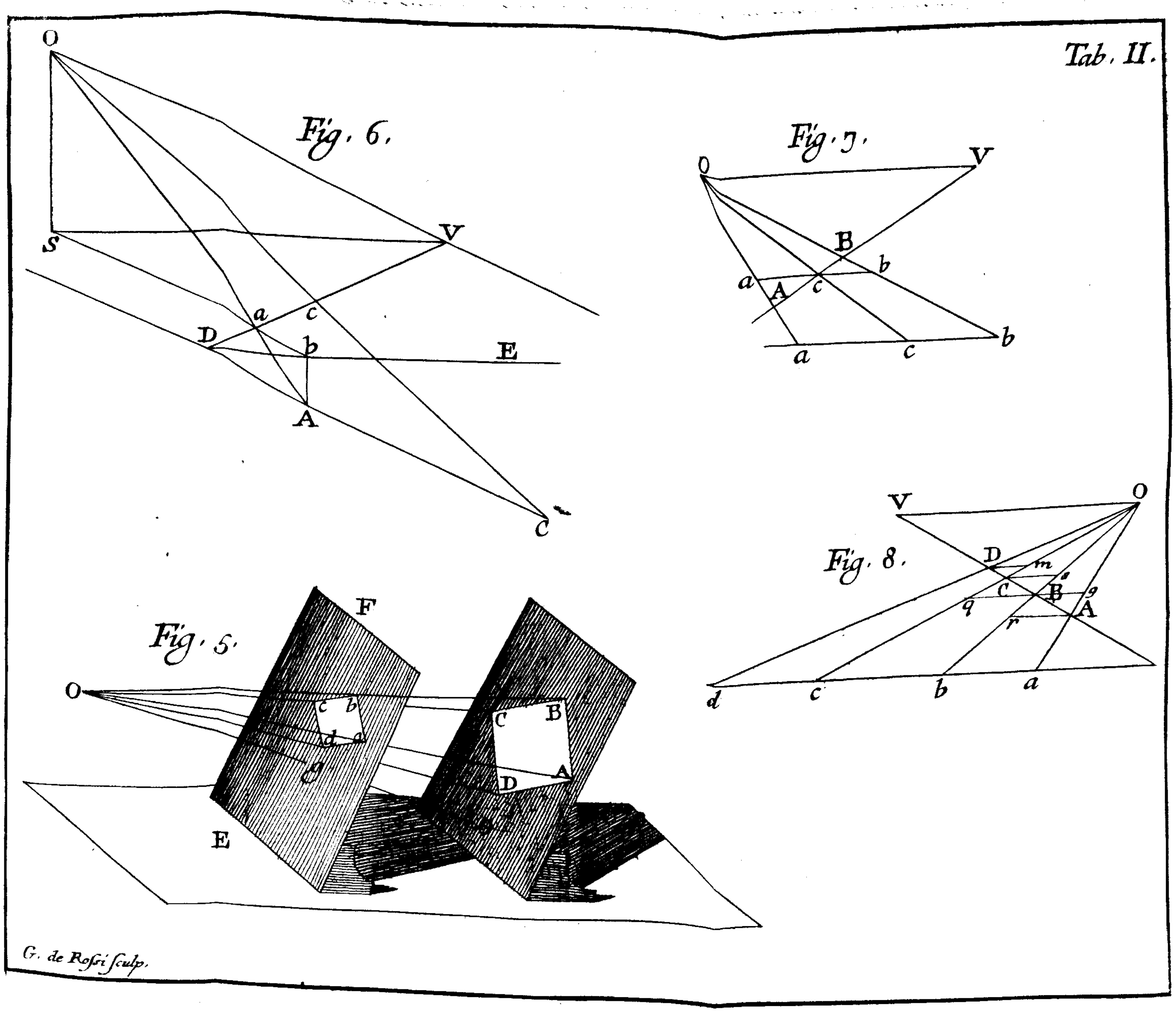
Scol. Si capisce facilmente la teoria e la costruzione degli oriuoli Babilonici, e Italici. Immaginiamo il Sole nascere in tre punti qualunque dell'orizonte, secondo la sua diversa *amplitudine ortiva*. Si concepisca di poi il Sole alzato sull'orizonte, e sia il centro del Sole in tre altri punti corrispondenti: quali essendo trasportati per il moto diurno, è evidente che saranno nel medesimo cerchio massimo della sfera, del quale la projezione gnomonica sarà una linea retta che si chiamerà *oraria*, poichè per mezzo di essa si avrà il tempo dal nascere o tramontare del Sole. Dunque in queste sorte di oriuoli si deve trovare la projezione del polo, dell'equinoziale, dell'orizonte, e del tropico. Si segni il punto, in cui il tropico taglia l'orizonte verso *l'occaso* nell'oriuolo Babilonico, e verso *l'orto* nell'Italico; questi punti saranno la projezione del centro del Sole oriente o occidente nelli Solstitii, dalli quali punti si conteranno le ore. Si trovi la projezione del meridiano che passa per l'intersezione del tropico, e dell'orizonte, e si noti il punto in cui la detta projezione incontra l'equinoziale. Da questo punto si taglino li segmenti dell'equinoziale corrispondenti a tutte le ore. Per le estremità o li termini di questi segmenti si conducano dal polo delle rette le quali tutte incontreranno il tropico; onde si avranno due punti delle medesime. Dal punto in cui l'equinoziale e l'orizonte si intersecano, si taglino verso l'istessa parte i segmenti orarii, li termini delli quali si uniscano colli punti ora-

orarii già ritrovati, alzato lo stile, e scancellate le linee inutili, sarà compito l'oriuolo. Si suole adoperare la projezione del tropico, perchè in esso si terminano le linee orarie. Questo scolio diventerà più chiaro consultando in qualche libro di Gnomonica la figura d'un oriuolo Italico o Babilonico.

Dalli medesimi principii si potrebbe ricavare la costruzione delle carte idrografiche, le quali dipendono dalla projezione d'un Sferoide, e considerando lo Sferoide compresso verso li poli o verso l'equatore si determinerebbero le differenze nell'una o l'altra ipotesi. Ma si vedano le tavole Loxodromiche del Sig. Murdok. Finirò questo libro coll'osservare che il metodo delle projezioni può essere utilissimo nelli calcoli più sublimi; la projezione delle curve e delle superficie curvilinee produce spesse volte delle facilità sorprendenti nelle loro quadrature. Ma questa materia richiede un trattato a parte che io spero di dare alla luce.

IL FINE.


Tab. I.
Fig. 4.
Fig. 3.
Fig. 1.
Fig. 2.
Gaetano de Rossi sculp.


Tab. II.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 5.
G. de Rossi sculp.

Tab. III.

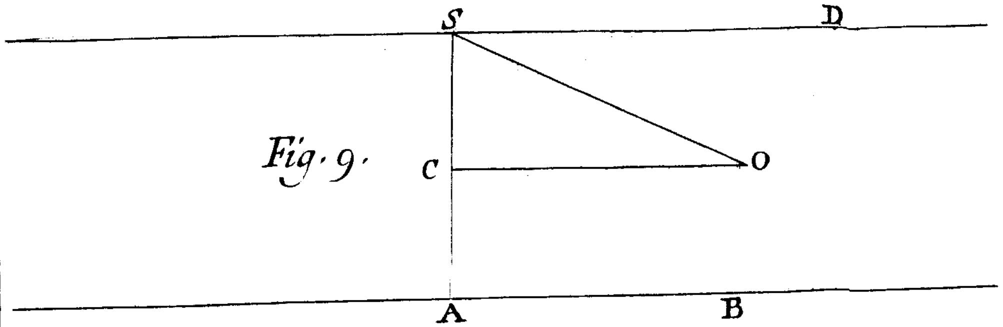


Fig. 9.

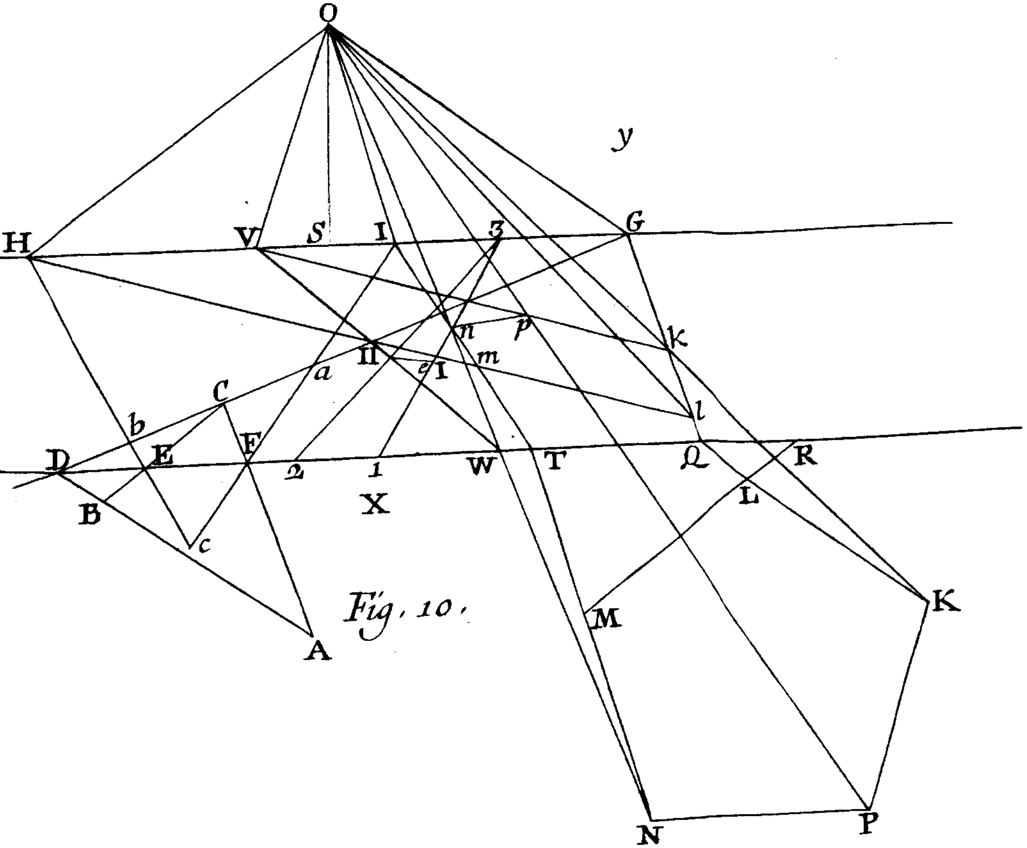
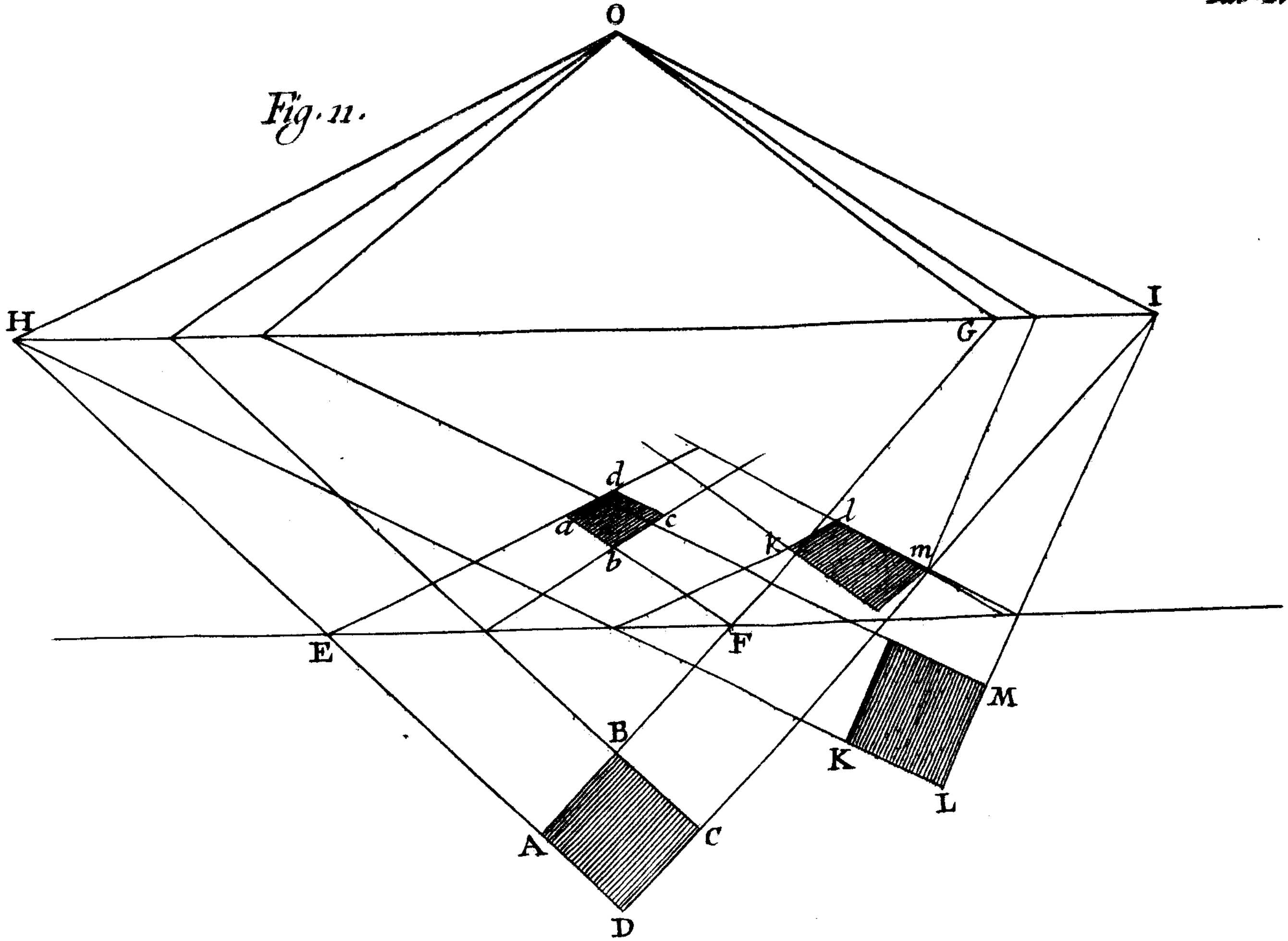


Fig. 10.

G. de Rossi sc.

Tab. IV.

Fig. 11.



G. de Rossi sc.

Fig. 12.

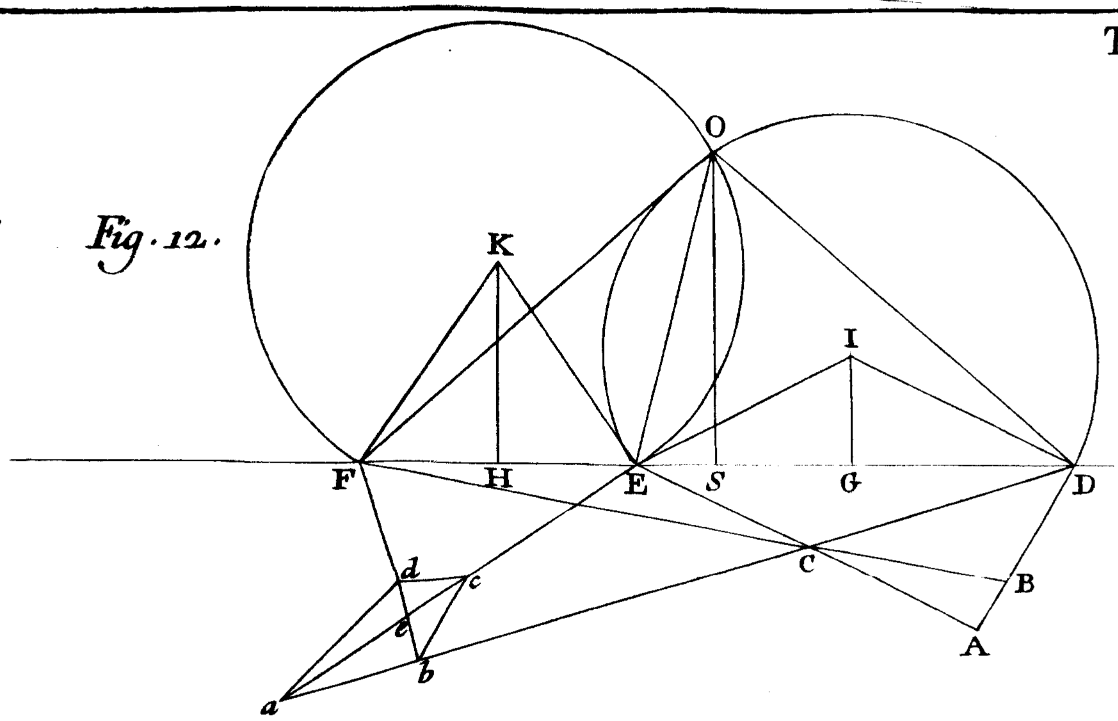
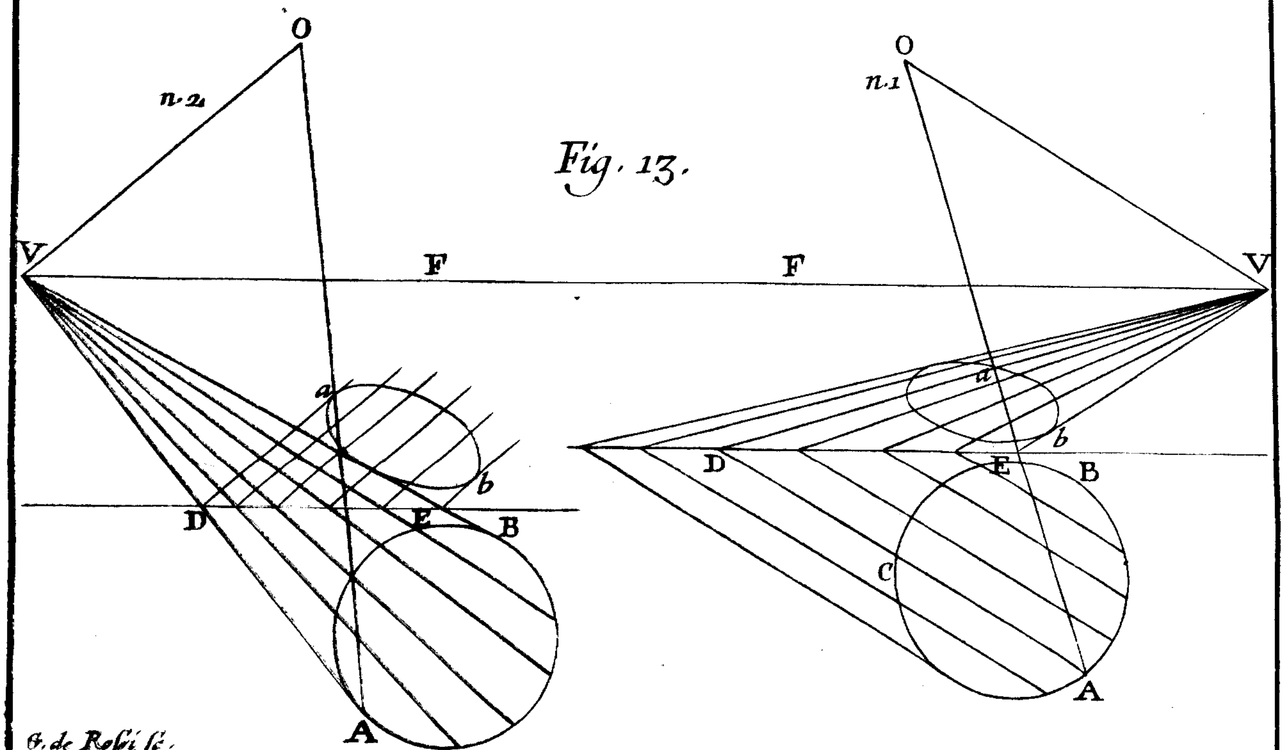


Fig. 13.



G. de Rossi sc.

Fig. 14.

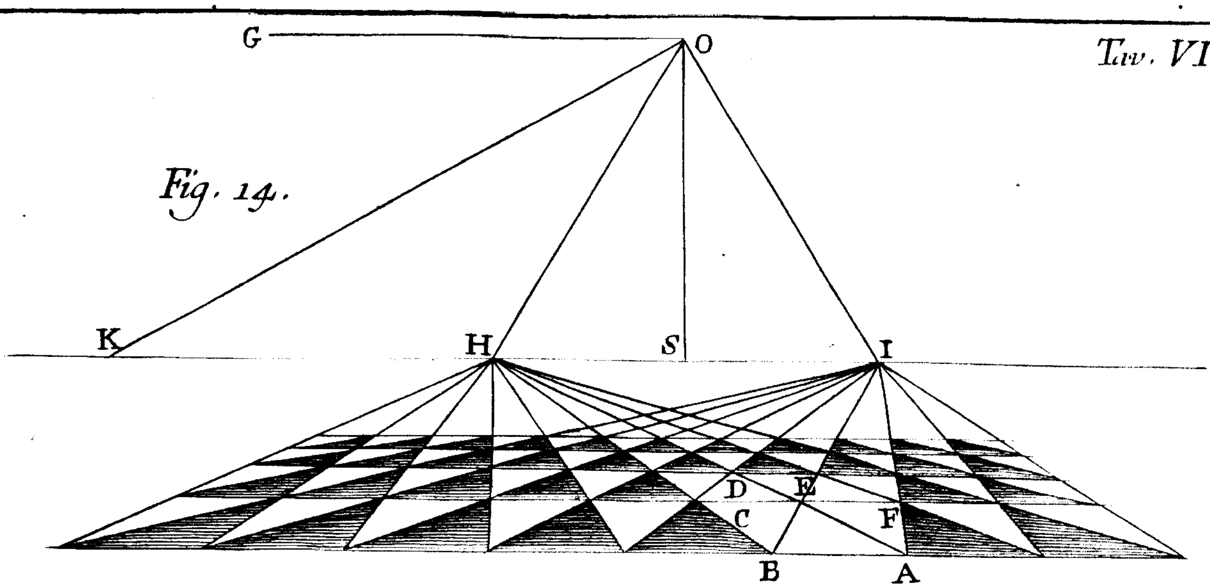
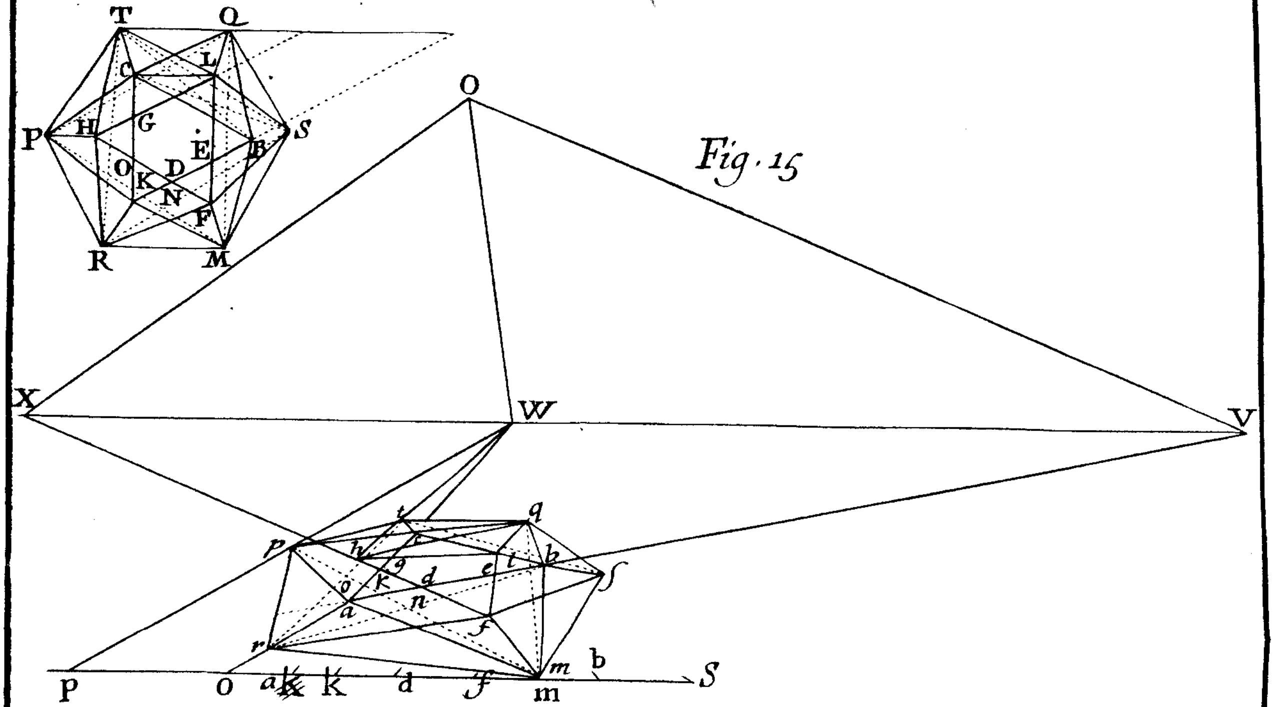


Fig. 15



G de Rossi sc.

Fig. 16.

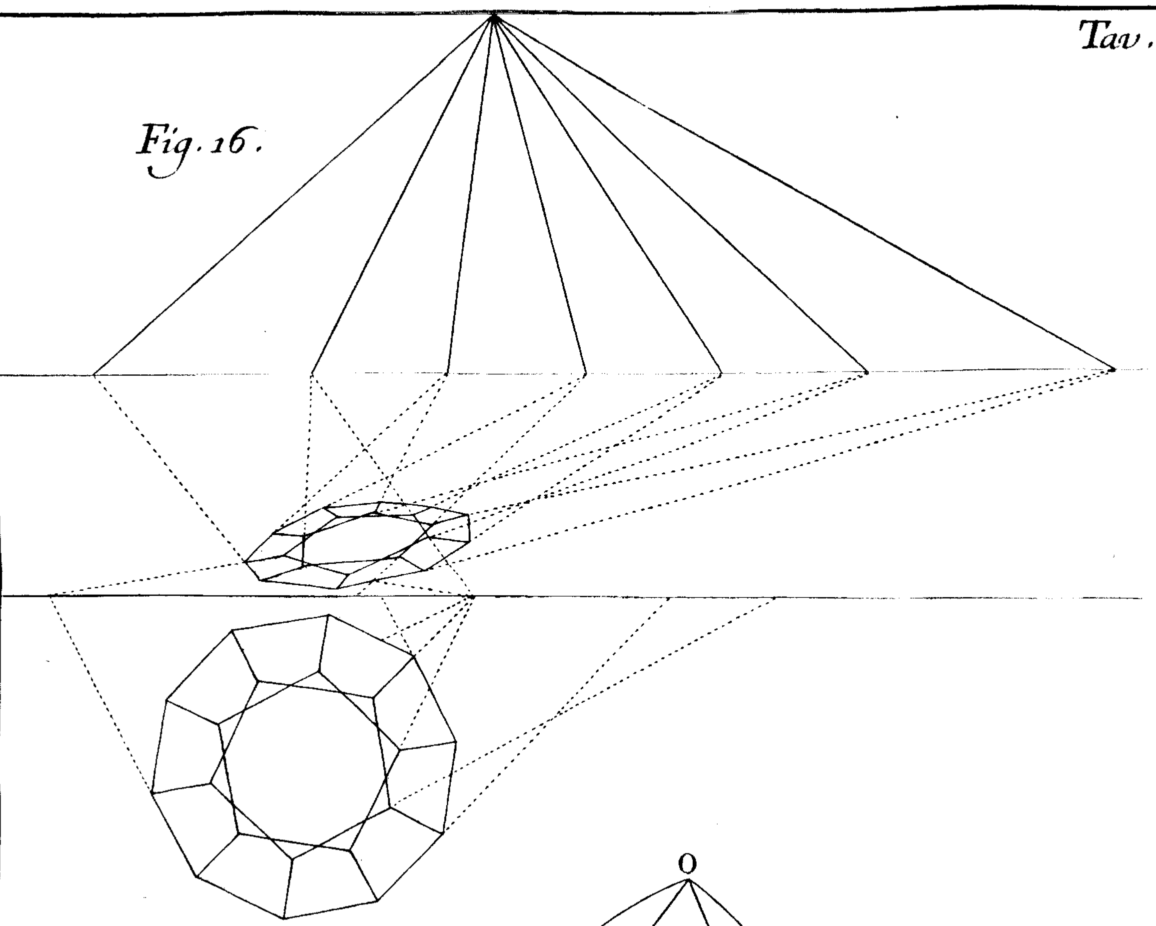
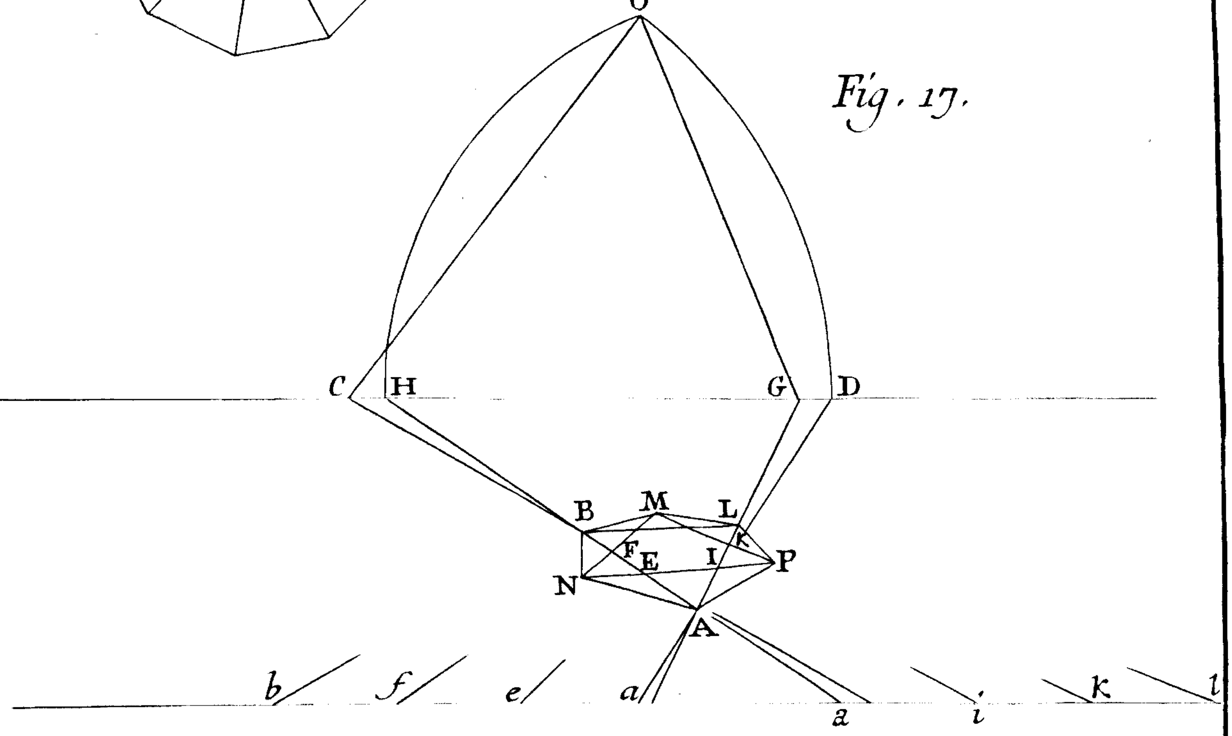


Fig. 17.



G. de Rossi sc.

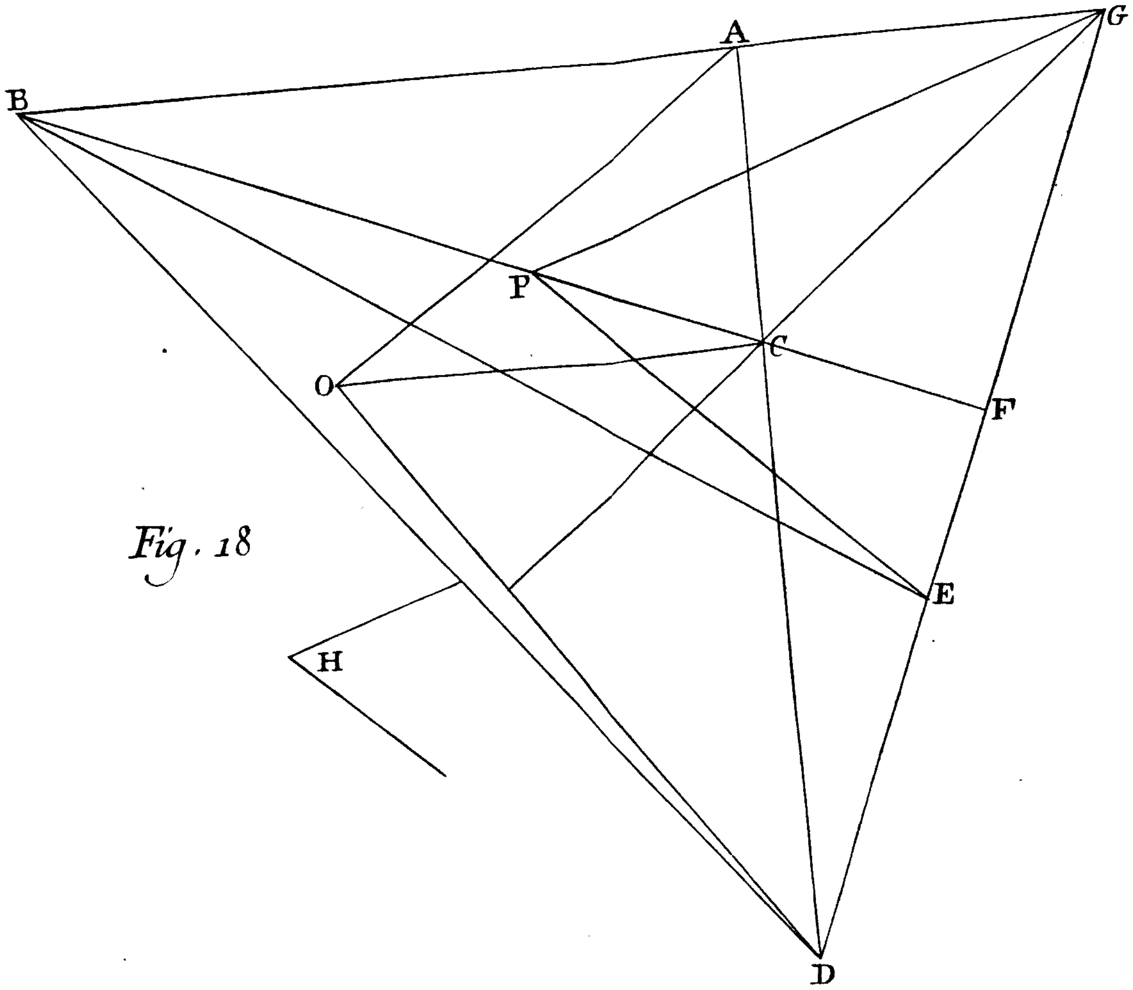


Fig. 18

G. de Rossi sc.

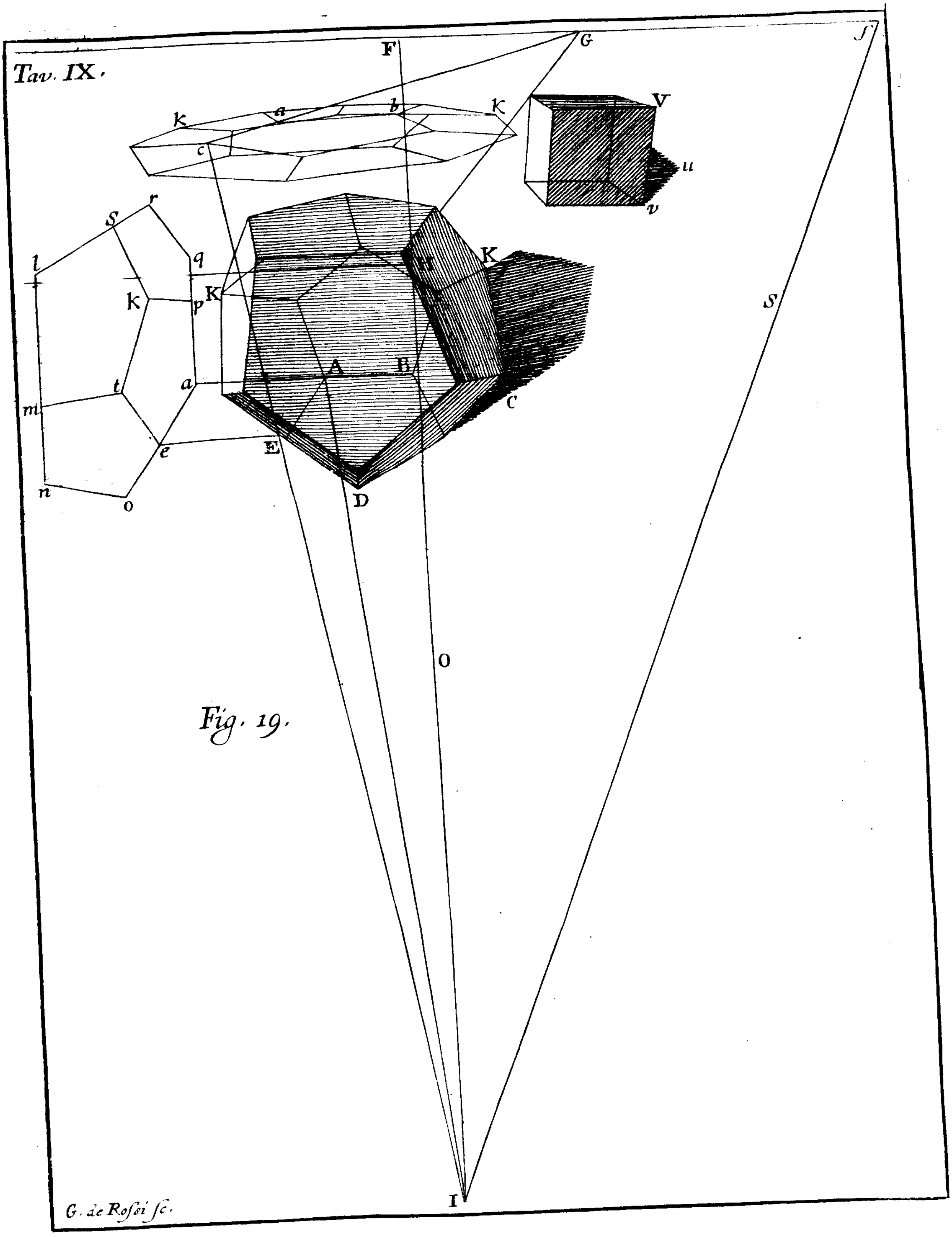


Fig. 19.

G. de Rossi sc.

Tav. X.

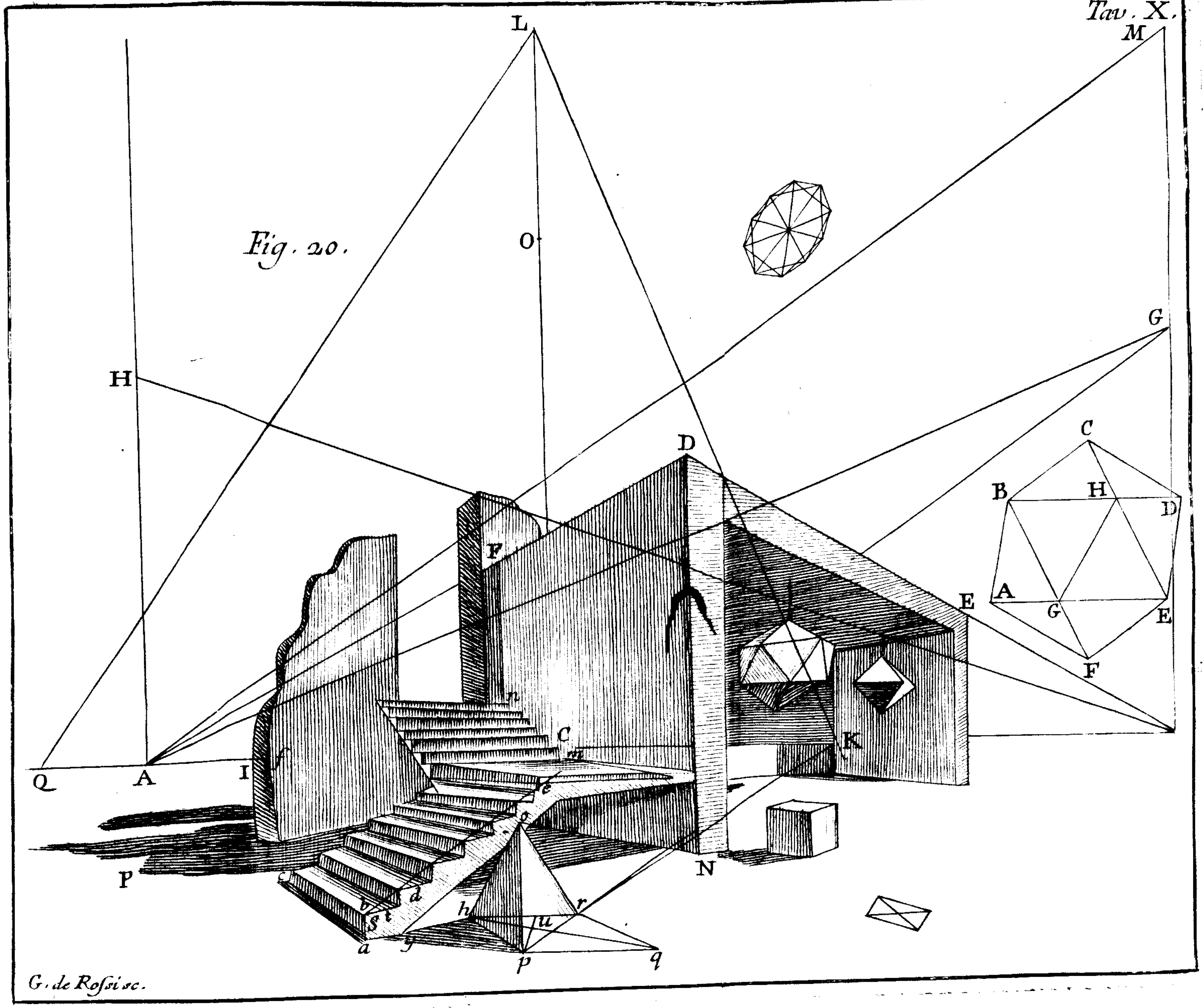


Fig. 20.

G. de Rossi sc.

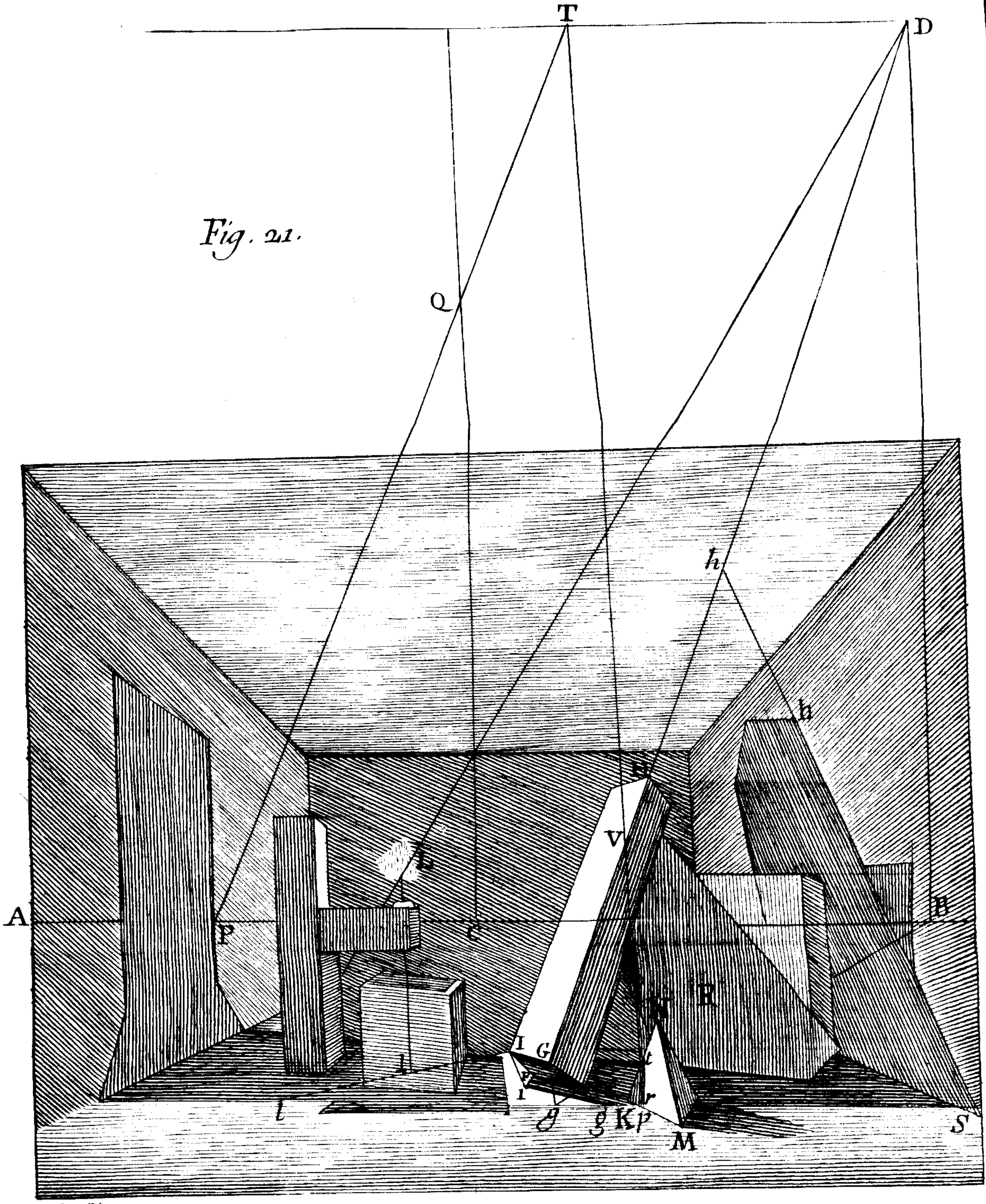
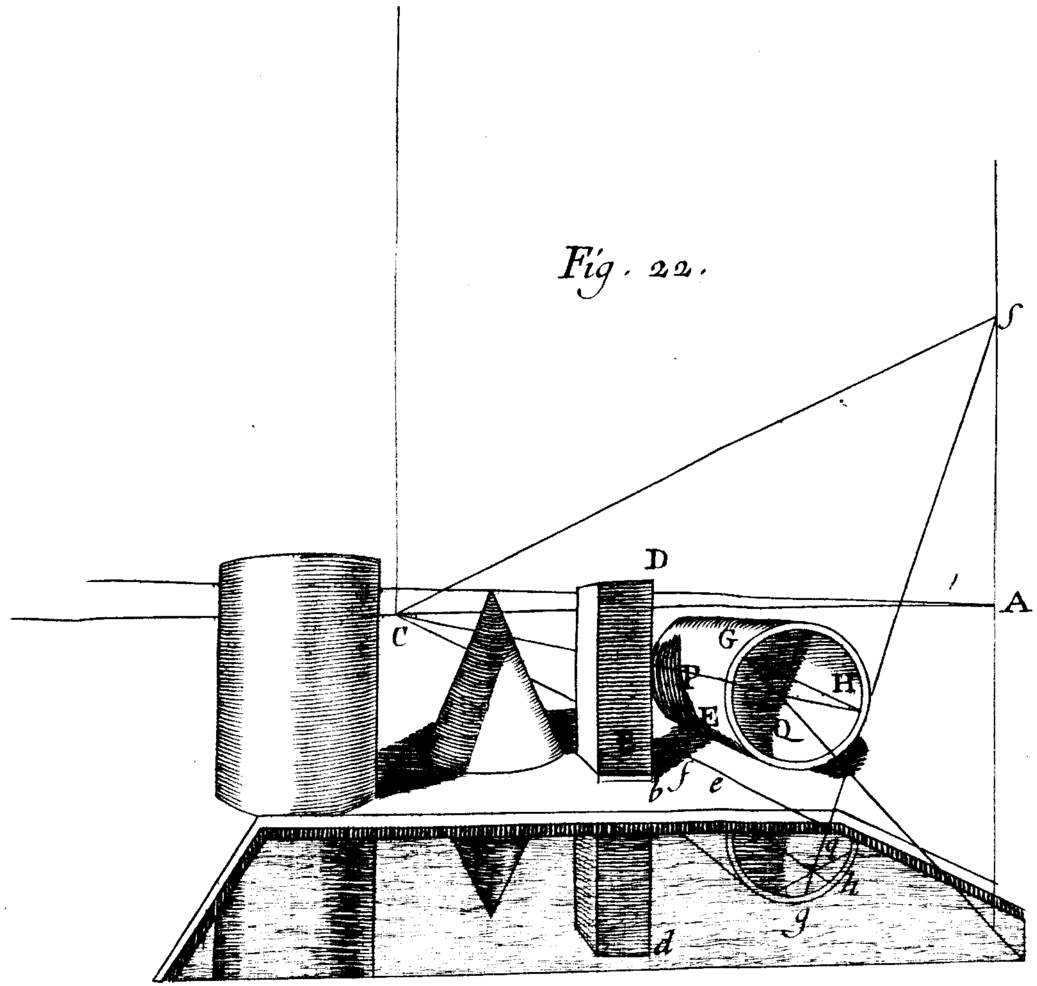


Fig. 21.

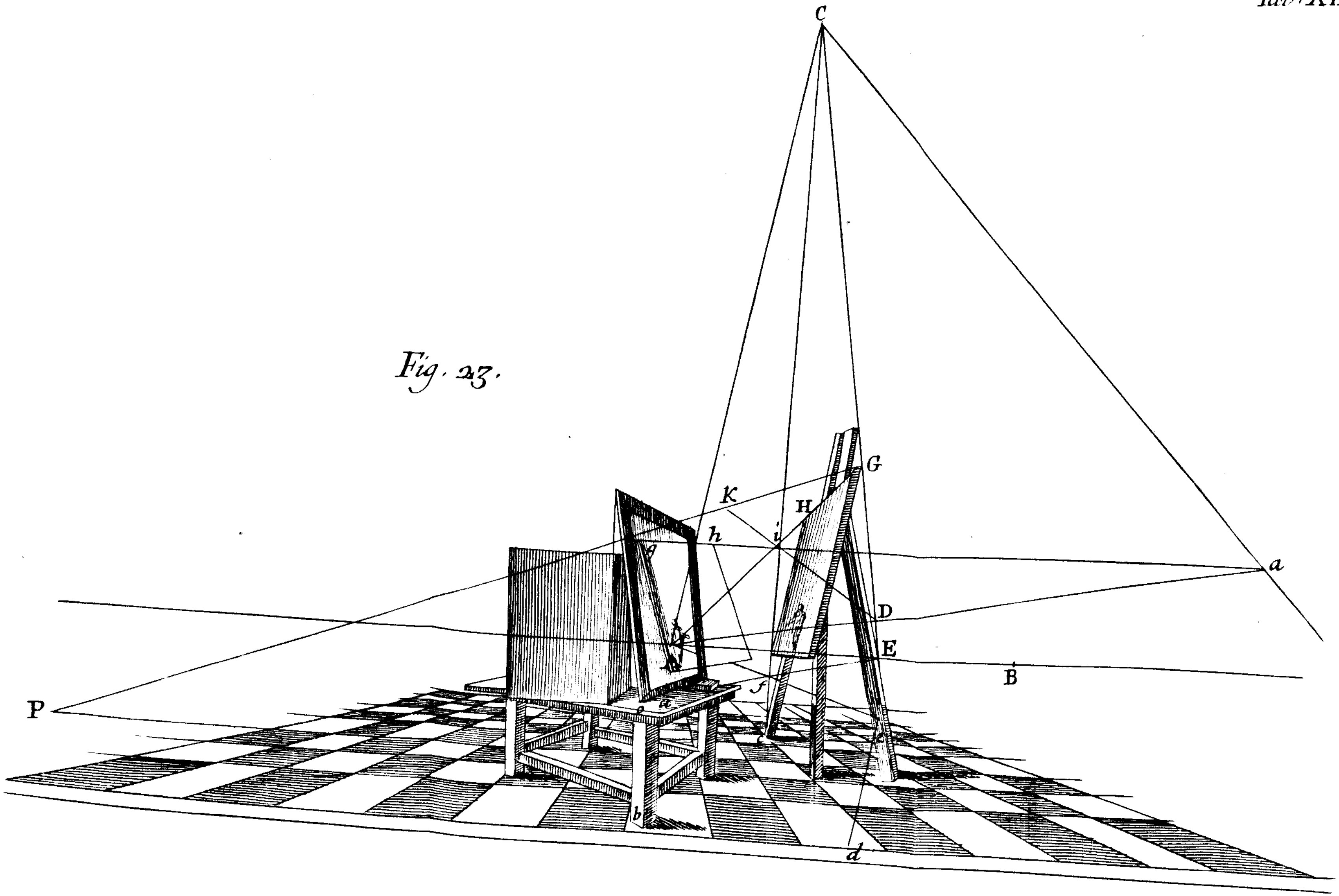
G. de Rossi sc.

Fig. 22.



G. de Rossi sc.

Fig. 23.



G. de Rossi sc.

Tav. XIV.

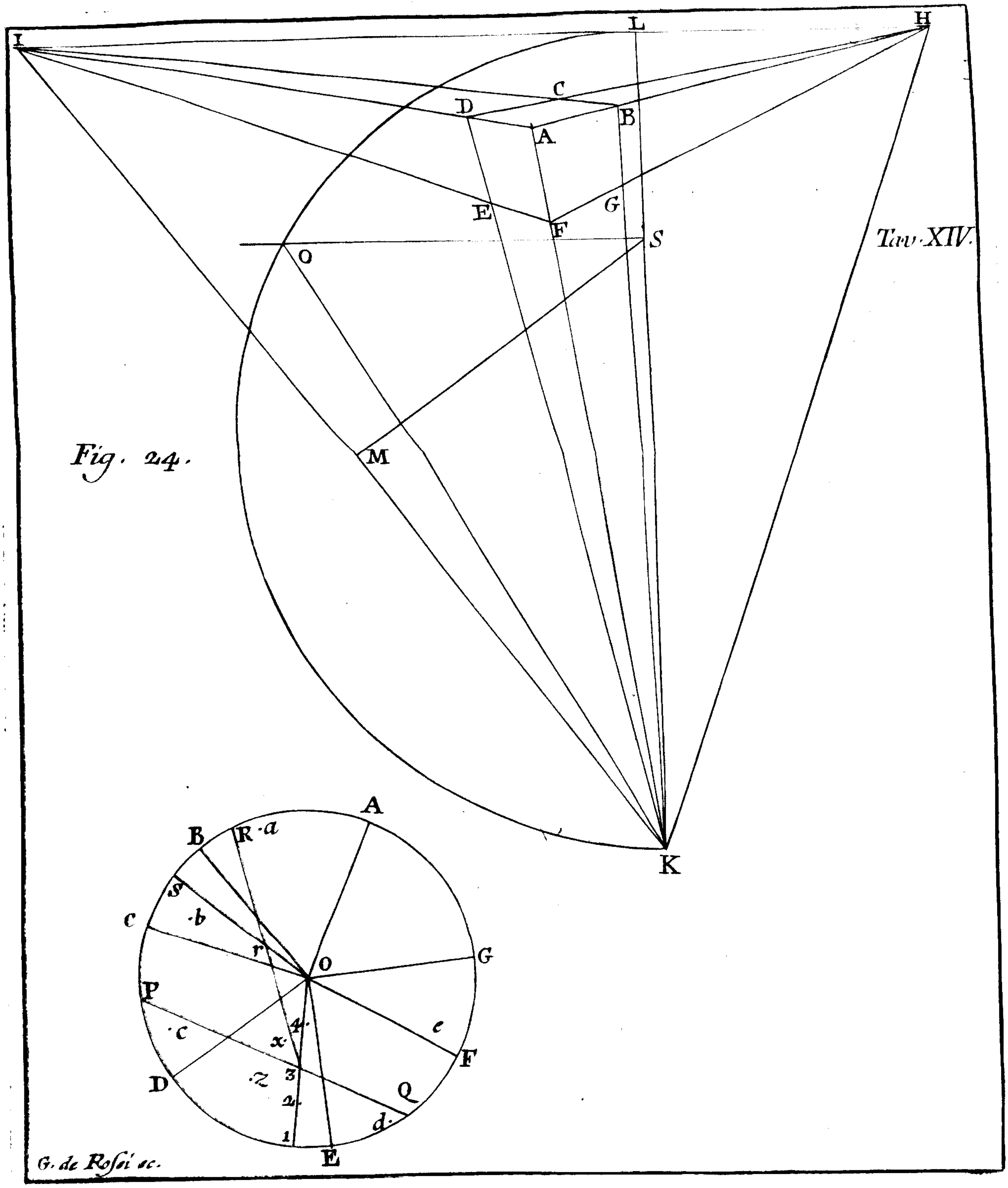


Fig. 24.

G. de Rossi sc.

Tav. XV.

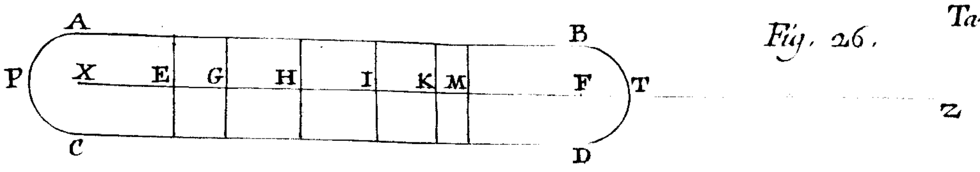


Fig. 26.

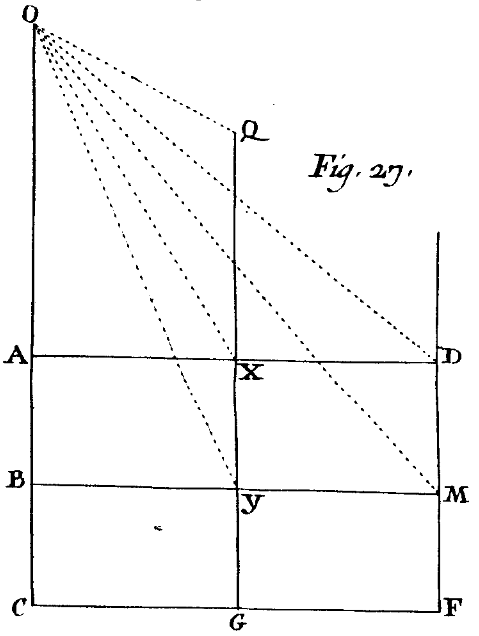


Fig. 27.

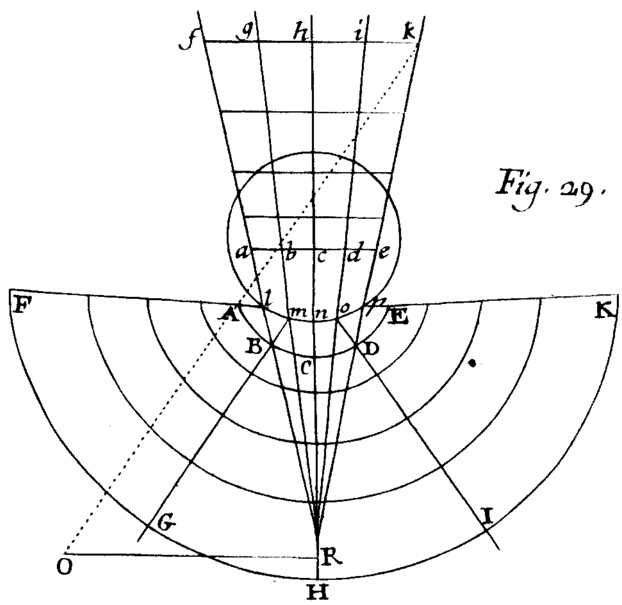
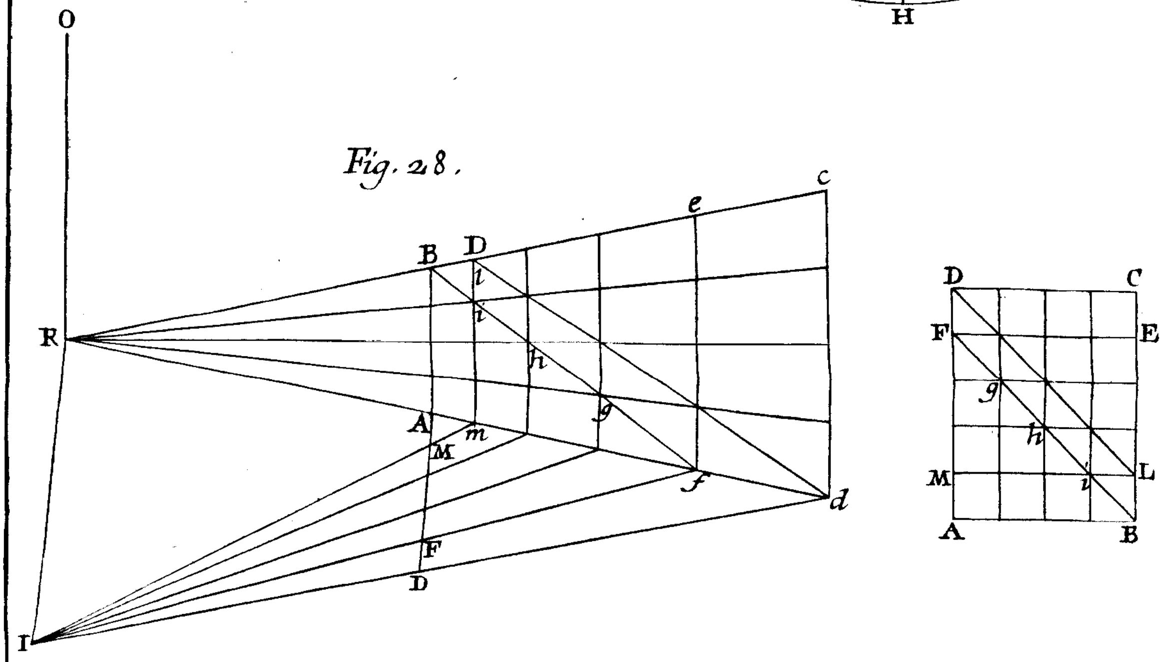


Fig. 29.

Fig. 28.



Tav. XVI.

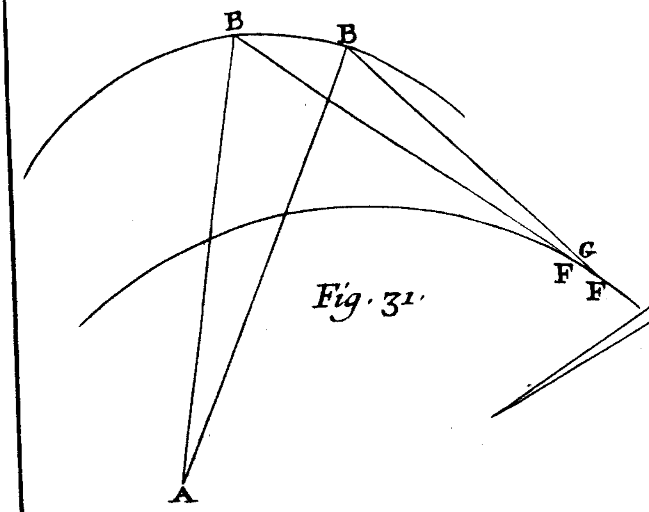


Fig. 31.

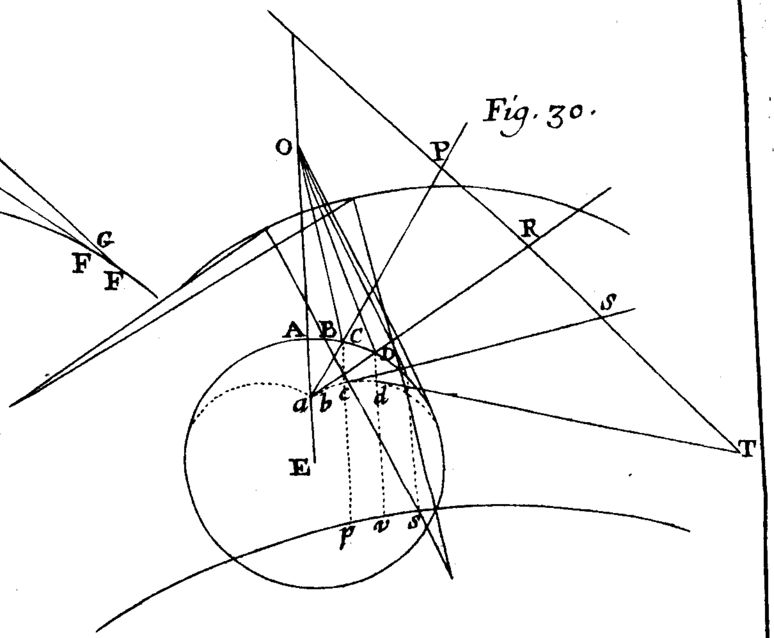


Fig. 30.

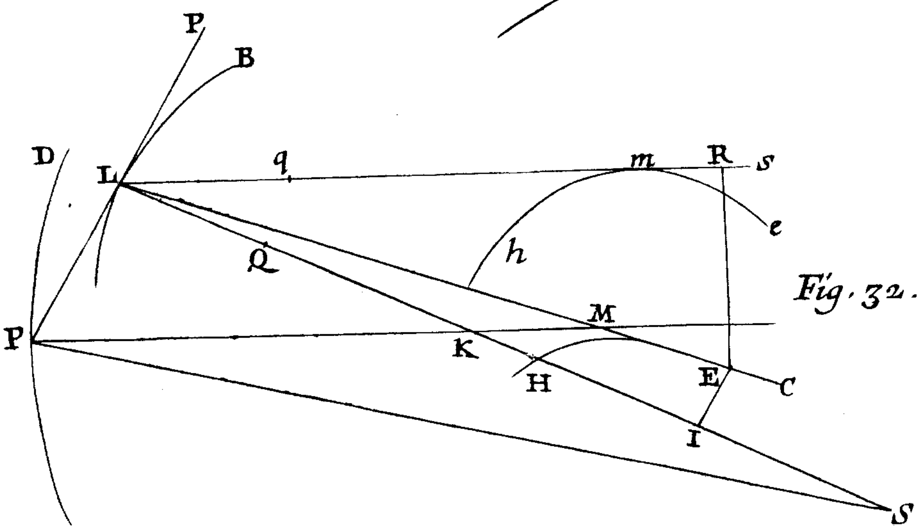


Fig. 32.

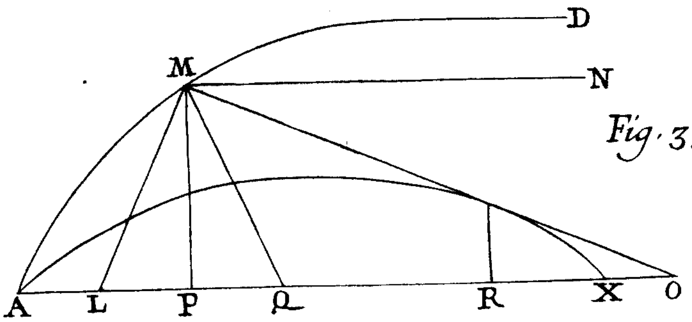


Fig. 33.

Tav. XVII.

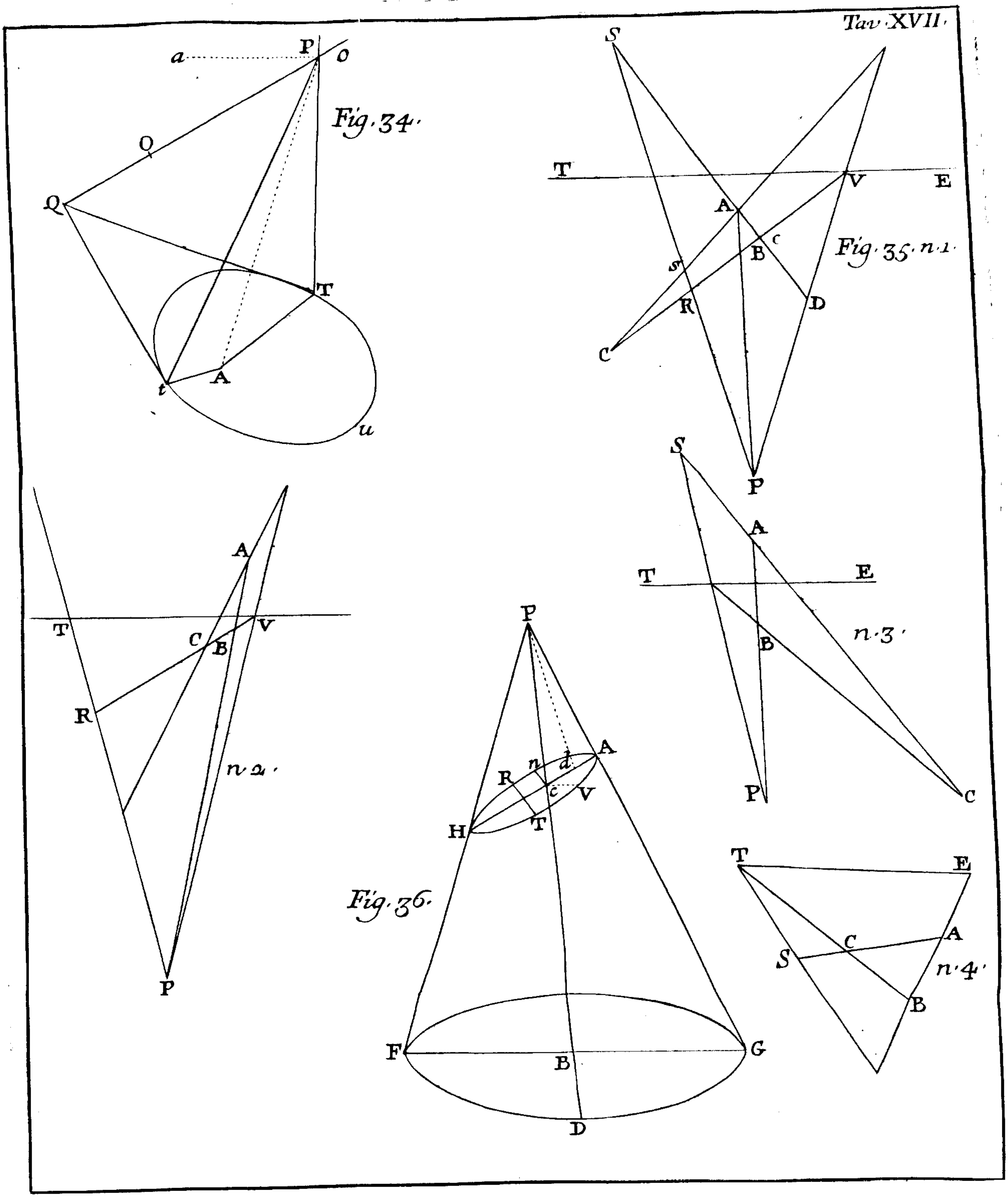


Fig. 34.

Fig. 35. n. 1.

n. 2.

n. 3.

n. 4.

Fig. 36.

Tab. XVIII.

Fig. 37.

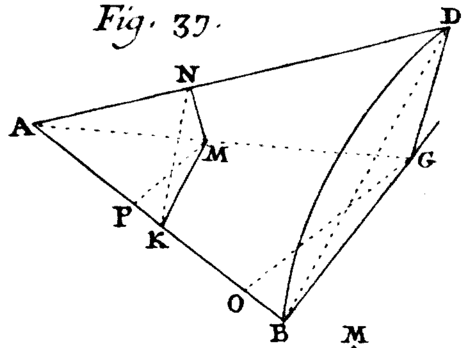


Fig. 38.

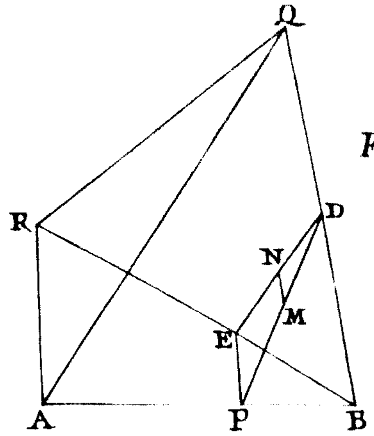


Fig. 39.

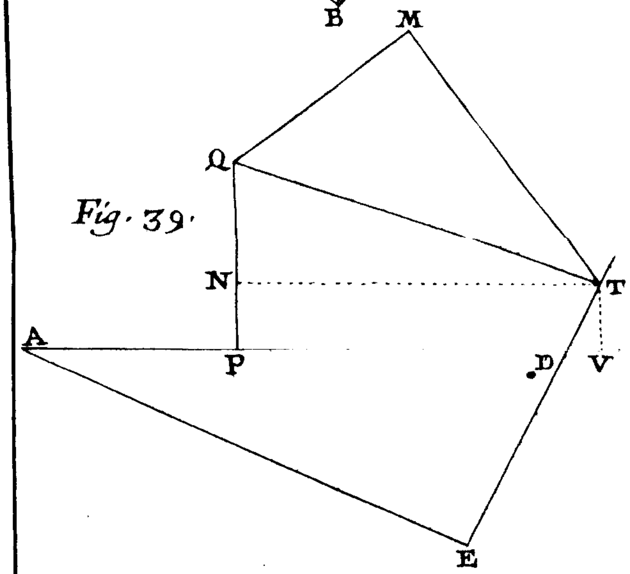


Fig. 40.

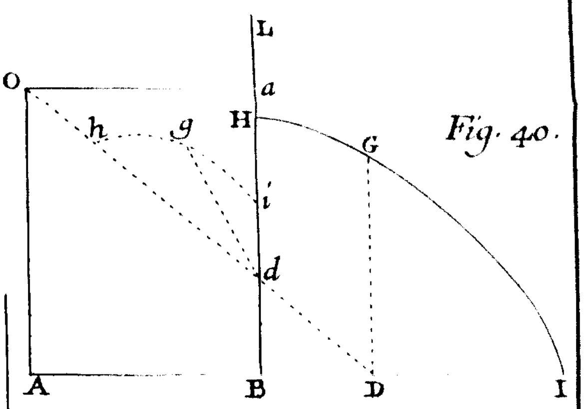
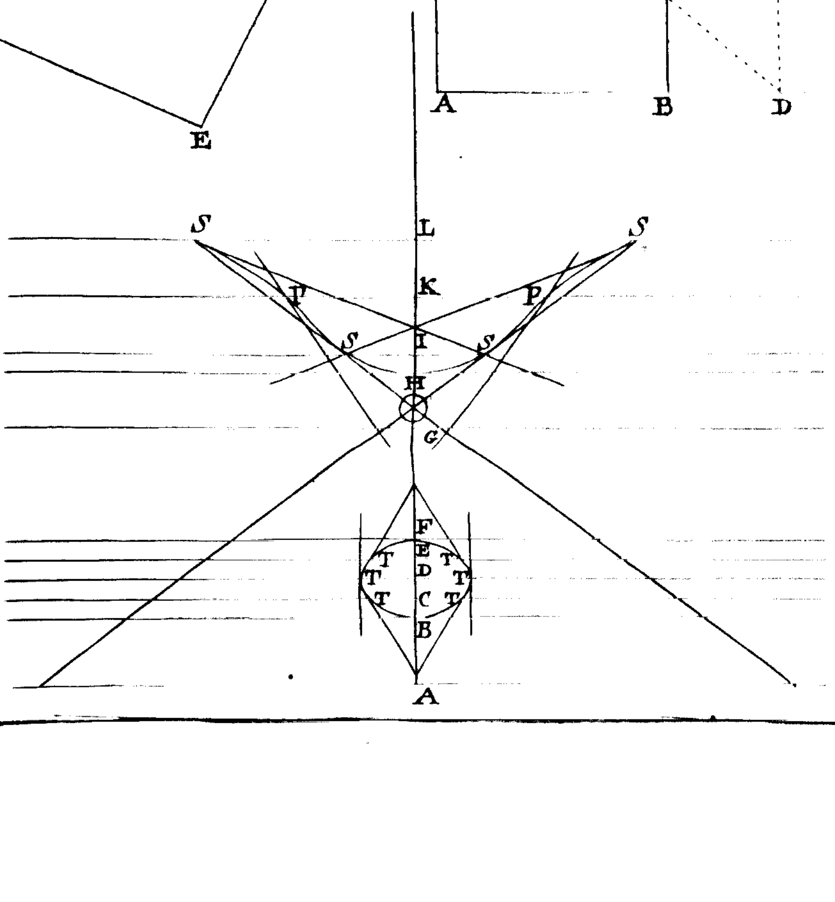


Fig. 41.



Tav. XIX.

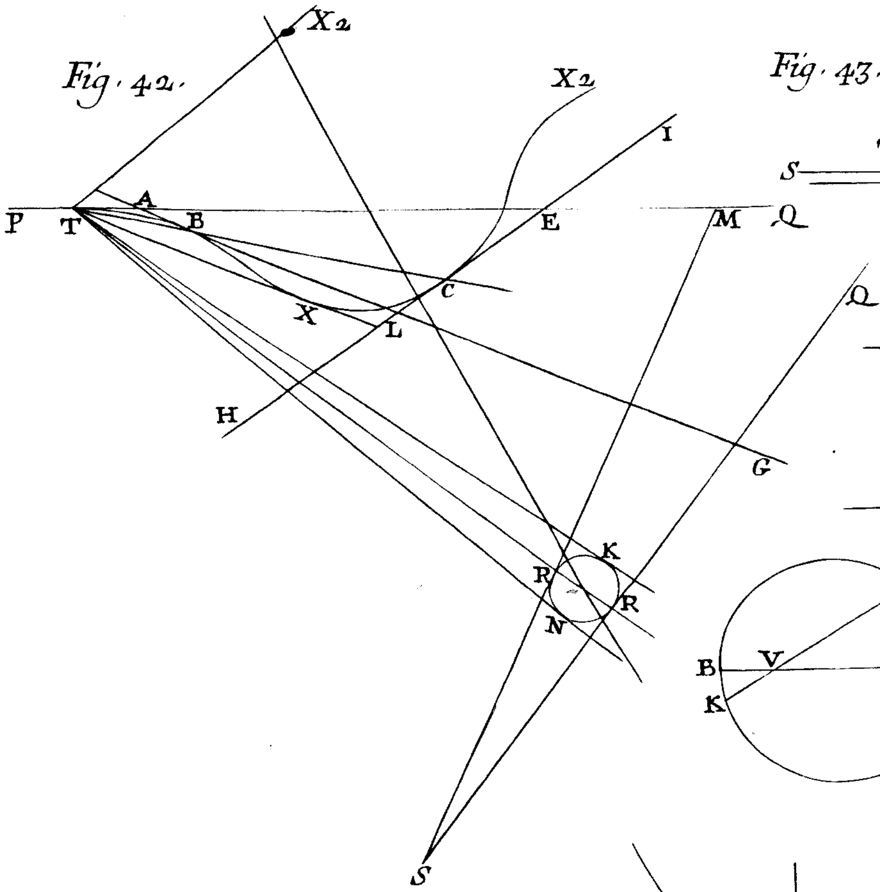


Fig. 42.

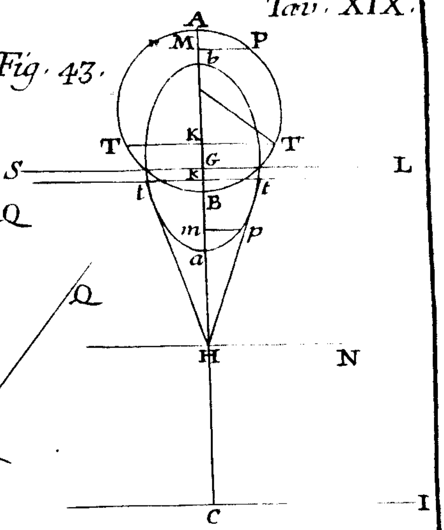


Fig. 43.

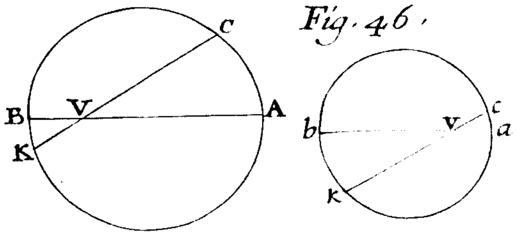


Fig. 46.

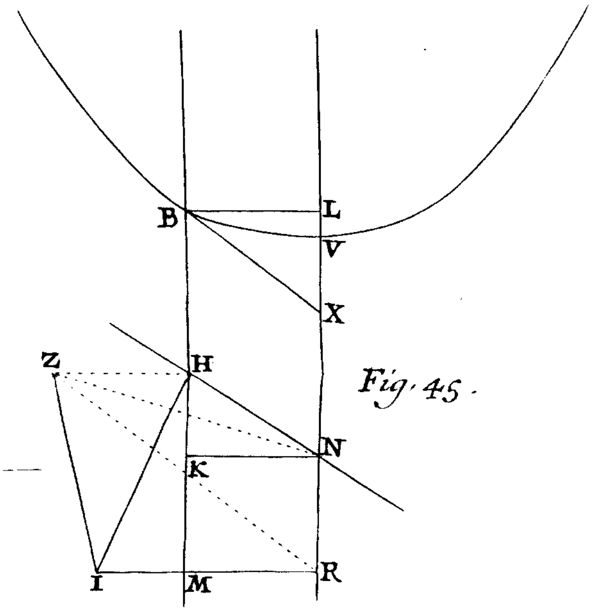


Fig. 45.

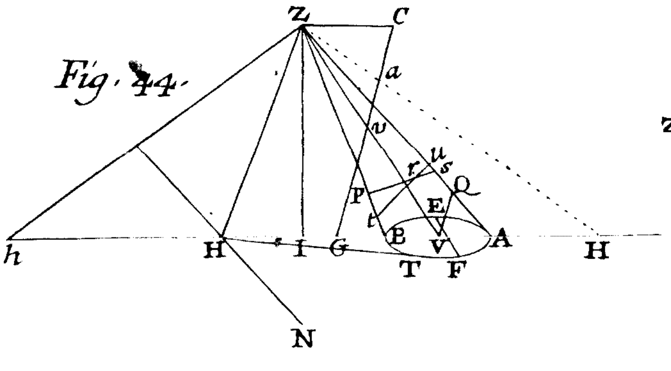


Fig. 44.